Mathematisches Institut der LMU | Sommersemester 2017
Iosif Petrakis, Helmut Schwichtenberg | Blatt 9

Übungen zur Vorlesung „Logik II“

Aufgabe 33. Im Kontext und unter Verwendung von Aufgabe 29 (Blatt 8) zeigen Sie
$$I^{k+1}_m I^k_n =_\beta I^k_{n^m} \qquad \text{für } m > 0.$$

Aufgabe 34. Es sei $E_{\mathbf{N}}$ induktiv definiert durch
$$E_{\mathbf{N}} := \mu_X(0 \in X, \forall_n(n \in X \to Sn \in X)).$$
(a) Formulieren Sie das Eliminationsaxiom $E^-_{\mathbf{N}}$.
(b) Beweisen Sie `EqNatToEqD`:
$$\forall_{n,m}(n, m \in E_{\mathbf{N}} \to n =_{\mathbf{N}} m \to n \equiv m)).$$
Hierbei ist $=_{\mathbf{N}}$ die in der Vorlesung (Abschnitt 2.2.1) definierte Funktion vom Typ $\mathbf{N} \to \mathbf{N} \to \mathbf{B}$. Hinweis. Verwenden Sie (mehrmals) $E^-_{\mathbf{N}}$, die Verträglichkeit von $\equiv$ sowie `EfEqD`: $\mathbf{F} \to x^\rho \equiv y^\rho$.

Aufgabe 35. Beweisen Sie, daß die Konstruktoren 0 und S von $\mathbf{N}$ disjunkte Wertebereiche haben (bzgl. $\equiv$), also `EqDNatSuccZeroToF`:
$$\forall_n(Sn \equiv 0 \to \mathbf{F})$$
Hinweis. Verwenden Sie $\mathcal{R}^{\mathbf{B}}_{\mathbf{N}}$ und seine Konversionsregeln
$$\mathcal{R}^{\mathbf{B}}_{\mathbf{N}} 0xf = x, \qquad \mathcal{R}^{\mathbf{B}}_{\mathbf{N}}(Sn)xf = fn(\mathcal{R}^{\mathbf{B}}_{\mathbf{N}} nxf)$$
mit geeigneten Werten für x und f.

Aufgabe 36. Wie in der Vorlesung sei ${}^{\mathrm{co}}I$ koinduktiv definiert durch das (vereinfachte) Abschlußaxiom ${}^{\mathrm{co}}I^-$:
$$\forall_x(x \in {}^{\mathrm{co}}I \to \exists_{d,x'}(d \in \mathrm{Sd} \wedge x' \in {}^{\mathrm{co}}I \wedge x = \frac{x'+d}{2})).$$
Das zugehörige Axiom vom größten Fixpunkt ${}^{\mathrm{co}}I^+$ ist
$$\forall_x(x \in X \to$$
$$\forall_x(x \in X \to \exists_{d,x'}(d \in \mathrm{Sd} \wedge (x' \in {}^{\mathrm{co}}I \vee x' \in X) \wedge x = \frac{x'+d}{2})) \to x \in {}^{\mathrm{co}}I).$$
Beweisen Sie $\mathbf{F} \to x \in {}^{\mathrm{co}}I$.

Abgabe. Mittwoch, 28. Juni 2017, in der Vorlesung.