Übungen zur Vorlesung „Logik II"

Aufgabe 29. Für eine feste Formel A definieren wir die ihre k-fache Iteration kA durch $0A := A$ und $(k+1)A := (kA \to kA)$, und (mit k für kA) die *Churchschen Numerale* als Herleitungsterme der Formel k durch

$$I_n^k := \lambda_{v^{k\to k}} \lambda_{u^k} \, v^{(n)}(u)$$

wobei $v^{(n)}(u)$ für $v(v(\dots(vu)\dots))$ steht, mit n Vorkommen von v. Wir schreiben $M \circ N$ für $\lambda_u M(Nu)$ und $M =_\beta N$ falls M und N dieselbe β-Normalform haben. Zeigen Sie

$$(I_n^k v) \circ (I_m^k v) =_\beta I_{n+m}^k v.$$

Aufgabe 30. Die Leibniz-Gleichheit $\mathrm{EqD} := \mu_X(\forall_x Xxx)$ mit den Axiomen $\mathrm{EqD}_0^+ \colon \forall_x(x^\rho \equiv x^\rho)$ und $\mathrm{EqD}^- \colon \forall_{x,y}(x \equiv y \to \forall_x Xxx \to Xxy)$ (wobei $x \equiv y$ steht für $\mathrm{EqD}(\rho)(x^\rho, y^\rho)$) erfüllt

(a) (Verträglichkeit) $\forall_{x,y}(x \equiv y \to A(x) \to A(y))$,
(b) (Symmetrie) $\forall_{x,y}(x \equiv y \to y \equiv x)$,
(c) (Transitivität) $\forall_{x,y,z}(x \equiv y \to y \equiv z \to x \equiv z)$.

Aufgabe 31. Es sei $E_{\mathbf{N}}$ induktiv definiert durch

$$E_{\mathbf{N}} := \mu_X(0 \in X, \forall_n(n \in X \to Sn \in X)).$$

Beweisen Sie `EfENat`:

$$\mathbf{F} \to \forall_n(n \in E_{\mathbf{N}}) \qquad \text{(es war } \mathbf{F} := (\mathtt{ff} \equiv \mathtt{tt})\text{)}.$$

Hinweis. Verwenden Sie `EfEqD`: $\mathbf{F} \to x^\rho \equiv y^\rho$.

Aufgabe 32. Beweisen Sie, daß der Konstruktor S von $\mathbf{N}$ injektiv ist (bzgl. $\equiv$), also `EqDNatSuccInj`:

$$\forall_{n,m}(Sn \equiv Sm \to n \equiv m).$$

Hinweis. Verwenden Sie die Vorgängerfunktion P auf $\mathbf{N}$, definiert durch $\mathrm{P}0 = 0$ und $\mathrm{P}(Sn) = n$, und die Verträglichkeit von $\equiv$.

Abgabe. Mittwoch, 21. Juni 2017, in der Vorlesung.