Übungen zur Vorlesung „Logik II“

Aufgabe 17. Ein Informationssystem $\boldsymbol{A} = (A, \mathrm{Con}, \vdash)$ heißt *kohärent* wenn es folgende Eigenschaft hat: $U \subseteq A$ ist konsistent genau dann, wenn es alle seine zweielementigen Teilmengen sind. Zeigen Sie, daß aus der Kohärenz von $\boldsymbol{B}$ die Kohärenz von $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ folgt.

Aufgabe 18. Für $C_\rho, \mathrm{Con}_\rho, \vdash_\rho$ definiert wie in der Vorlesung zeige man
(a) $U \subseteq V \in \mathrm{Con}_\rho \to U \in \mathrm{Con}_\rho$,
(b) $a \in \mathrm{Con}_\rho \to \{a\} \in \mathrm{Con}_\rho$.

Aufgabe 19. Für $C_\rho, \mathrm{Con}_\rho, \vdash_\rho$ definiert wie in der Vorlesung zeige man
(a) $U \vdash_\rho a \to U \cup \{a\} \in \mathrm{Con}_\rho$,
(b) $U \in \mathrm{Con}_\rho \to V \subseteq U \to V \vdash_\rho a \to U \vdash_\rho a$.
Hinweis: durch Induktion über die Höhe (und Fallunterscheidung nach ρ) zeige man beide Aussagen simultan.

Aufgabe 20. (a) Geben Sie zu der Algebra $\mathbf{P} := \mu_\xi(\xi, \xi \to \xi, \xi \to \xi)$ der (binären) positiven Zahlen mit Konstruktoren $1^{\mathbf{P}}$, $S_0^{\mathbf{P}\to\mathbf{P}}$, $S_1^{\mathbf{P}\to\mathbf{P}}$ das Informationssystem $\boldsymbol{C}_{\mathbf{P}}$ durch seine Bestandteile $C_{\mathbf{P}}$, $\mathrm{Con}_{\mathbf{P}}$ und $\vdash_{\mathbf{P}}$ an.
(b) Wie sind die approximierende Abbildung r_{S_i} und die Werte $|r_{S_i}|(z)$ der zugehörigen stetigen Funktion von $|\mathbf{P}|$ nach $|\mathbf{P}|$ definiert?
(c) Beweisen Sie, daß $|r_{S_i}|$ injektiv ist, und daß die Wertebereiche von $|r_{S_0}|$ und $|r_{S_1}|$ disjunkt sind.
(d) Geben Sie je ein flaches Informationssystem an, in dem (i) nicht alle Konstruktoren injektiv sind und (ii) die Konstruktoren keine disjunkten Wertebereiche haben. (Beipiel für ein flaches Informationssystem: die Informationsatome a von $\mathbf{P}_{\text{flach}}$ sind alle $S_{i_0} S_{i_1} \dots S_{i_{n-1}} 1$, die konsistenten Mengen U alle Einermengen $\{a\}$ sowie die leere Menge $\emptyset$, und die Folgerungsrelation $U \vdash a$ ist definiert durch $a \in U$).

Abgabe. Mittwoch, 31. Mai 2017, in der Vorlesung.