Mathematisches Institut
der Universität München
Helmut Schwichtenberg

Sommersemester 2010
Blatt 10

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Logik II"

Aufgabe 37. (a) Eine Ordinalzahl α heißt *additive Hauptzahl*, wenn $\alpha \neq 0$ und $\beta + \gamma < \alpha$ für $\beta, \gamma < \alpha$. Man zeige, daß additive Hauptzahlen genau die Ordinalzahlen der Form ω^ξ sind. (Hinweis: Man verwende die Cantorsche Normalform zur Basis ω.)

(b) Eine Ordinalzahl α heißt *multiplikative Hauptzahl*, wenn $\alpha \neq 0$ und $\beta \cdot \gamma < \alpha$ für $\beta, \gamma < \alpha$. Man bestimme alle multiplikativen Hauptzahlen.

Aufgabe 38. Man zeige:

(a) Es seien $\omega^{\alpha_m} + \dots + \omega^{\alpha_0}$ und $\omega^{\beta_n} + \dots + \omega^{\beta_0}$ Cantorsche Normalformen (mit $m, n \geq -1$). Dann gilt

$$\omega^{\alpha_m} + \dots + \omega^{\alpha_0} < \omega^{\beta_n} + \dots + \omega^{\beta_0}$$

genau dann, wenn es ein $i \geq 0$ gibt mit $\alpha_{m-i} < \beta_{n-i}$, $\alpha_{m-i+1} = \beta_{n-i+1}, \dots, \alpha_m = \beta_n$, oder $m < n$ und $\alpha_m = \beta_n, \dots, \alpha_0 = \beta_{n-m}$.

(b) Es seien $\omega^{\alpha_m} + \dots + \omega^{\alpha_0}$ und $\omega^{\beta_n} + \dots + \omega^{\beta_0}$ Cantorsche Normalformen. Dann ist

$$\omega^{\alpha_m} + \dots + \omega^{\alpha_0} + \omega^{\beta_n} + \dots + \omega^{\beta_0} = \omega^{\alpha_m} + \dots + \omega^{\alpha_i} + \omega^{\beta_n} + \dots + \omega^{\beta_0},$$

wobei i minimal ist mit $\alpha_i \geq \beta_n$ falls ein solches i existiert, andernfalls $i = m + 1$ (also $\omega^{\beta_n} + \dots + \omega^{\beta_0}$).

Aufgabe 39. Für Cantorsche Normalformen $\omega^{\alpha_m} + \dots + \omega^{\alpha_0}$ und $\omega^{\beta_n} + \dots + \omega^{\beta_0}$ definiert man die *Hessenberg*sche (oder *natürliche*) Summe # durch

$$(\omega^{\alpha_m} + \dots + \omega^{\alpha_0}) \,\#\, (\omega^{\beta_n} + \dots + \omega^{\beta_0}) := \omega^{\gamma_{m+n+1}} + \dots + \omega^{\gamma_0},$$

wobei $\gamma_{m+n+1}, \dots, \gamma_0$ eine (schwach) abnehmende Permutation der Ordinalzahlen $\alpha_m, \dots, \alpha_0, \beta_n, \dots, \beta_0$ ist. Man zeige, daß # assoziativ, kommutativ und stark monoton in beiden Argumenten ist.

Aufgabe 40. Eine Menge a heißt *von endlichem Charakter*, wenn

$$\forall_x (x \in a \leftrightarrow \forall_{y \subseteq x; y \text{ endlich}} (y \in a)).$$

Man beweise aus dem Auswahlaxiom das Teichmüller-Tukey Lemma: Jede nicht-leere Menge a von endlichem Charakter hat ein $\subseteq$-maximales Element.

Abgabe. Mittwoch, 7. Juli 2010, in der Vorlesung.