Mathematisches Institut
der Universität München
Helmut Schwichtenberg

Sommersemester 2010
Blatt 9

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Logik II"

Aufgabe 33. Man beweise
(a) $\alpha^\beta \in \mathrm{On}$.
(b) $0^\beta = 0$, $1^\beta = 1$.
(c) $1 < \alpha \to \beta < \gamma \to \alpha^\beta < \alpha^\gamma$.
(d) Es gibt α, β, γ mit $1 < \gamma$ und $1 < \alpha < \beta$, aber $\alpha^\gamma \not< \beta^\gamma$.
(e) $\alpha \leq \beta \to \alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$.

Aufgabe 34. Man beweise
(a) Sind $1 < \alpha$ und β Limeszahl, so auch α^β.
(b) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta\alpha^\gamma$.
(c) $\alpha^{\beta\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$.
(d) $1 < \alpha \to \beta \leq \alpha^\beta$.

Aufgabe 35. Es sei U eine nicht leere Menge und $\Gamma\colon \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U)$ ein monotoner Operator (s. Aufgabe 28a auf Blatt 7). Man definiere $\Gamma{\uparrow}\alpha$ mittels transfiniter Rekursion:

$$\begin{aligned}
\Gamma{\uparrow}0 &:= \emptyset, \\
\Gamma{\uparrow}(\alpha+1) &:= \Gamma(\Gamma{\uparrow}\alpha), \\
\Gamma{\uparrow}\lambda &:= \bigcup_{\alpha<\lambda} \Gamma{\uparrow}\alpha \quad \text{für } \lambda \text{ Limeszahl.}
\end{aligned}$$

Man zeige
(a) $\Gamma{\uparrow}\alpha \subseteq \Gamma{\uparrow}(\alpha+1)$ für alle α.
(b) Gilt $\Gamma{\uparrow}\alpha = \Gamma{\uparrow}(\alpha+1)$, so folgt $\Gamma{\uparrow}(\alpha+\beta) = \Gamma{\uparrow}\alpha$ für alle β.
(c) Es ist $\Gamma{\uparrow}\alpha = \Gamma{\uparrow}(\alpha+1)$ für ein α mit $|\alpha| \leq |U|$.

Aufgabe 36. Mit (DC) bezeichnen wir folgende Aussage: "Es sei M eine Menge und R eine zweistellige Relation auf M. Für jedes $x \in M$ gebe es ein $y \in M$ mit yRx. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in M$ ein $f\colon \omega \to M$ mit $f(0) = x_0$ und $f(n+1)Rf(n)$ für alle $n \in \omega$". Man beweise mit Hilfe von (DC):
(a) (AC_ω).
(b) Es sei M eine Menge und R eine zweistellige Relation auf M. Dann ist R genau dann fundiert auf M, wenn es kein $f\colon \omega \to M$ gibt mit $f(n+1)Rf(n)$ für alle $n \in \omega$.

Abgabe. Mittwoch, 30. Juni 2010, in der Vorlesung.