Mathematisches Institut
der Universität München
Helmut Schwichtenberg

Sommersemester 2010
Blatt 8

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Logik II"

Aufgabe 29. Man zeige durch Angabe geeigneter Bijektionen
(a) $|a \times b| = |b \times a|$.
(b) $|{}^a({}^b c)| = |{}^{a \times b} c|$.
(c) $|\mathcal{P}(a)| = |{}^a 2|$.

Aufgabe 30. Man zeige
(a) Ist $e\colon a \to {}^a b$ surjektiv, so gibt es zu jedem $f\colon b \to b$ ein $x \in b$ mit $f(x) = x$.
(b) Man folgere aus (a), daß es kein surjektives $e\colon a \to {}^a 2$ geben kann.

Aufgabe 31. (a) Man zeige, daß das Auswahlaxiom (AC) äquivalent ist zu

$$\forall_x(\emptyset \notin x \to \forall_{y_1,y_2 \in x}(y_1 \cap y_2 = \emptyset) \to \exists_f(f\colon x \to \bigcup x \wedge \forall_{y \in x}(f(y) \in y))).$$

(b) Man zeige, daß (AC) äquivalent ist zu "Ist $g\colon a \to b$ surjektiv, so gibt es ein injektives $f\colon b \to a$ mit $g(f(x)) = x$ für alle $x \in b$".

Aufgabe 32. Es sei (AC_ω) die Aussage "Jede abzählbare Menge nicht-leerer Mengen besitzt eine Auswahlfunktion". Man beweise mit Hilfe von (AC_ω):
(a) Abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen sind abzählbar.
(b) Jedes $f\colon \omega \to \aleph_1$ hat einen in $\aleph_1$ beschränkten Wertebereich, d.h.,

$$\exists_{\beta < \aleph_1} \forall_{n < \omega}(f(n) < \beta).$$

Abgabe. Mittwoch, 23. Juni 2010, in der Vorlesung.