Mathematisches Institut
der Universität München
Helmut Schwichtenberg

Sommersemester 2010
Blatt 7

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Logik II"

Aufgabe 25. Man definiere $s_\alpha \colon \mathrm{On} \to V$ durch

$$\begin{aligned} s_\alpha(0) &:= \alpha, \\ s_\alpha(\beta+1) &:= s_\alpha(\beta)+1, \\ s_\alpha(\beta) &:= \bigcup \mathrm{rng}(s_\alpha{\restriction}\beta) \quad \text{für } \beta \text{ Limes} \end{aligned}$$

und setze $\alpha+\beta := s_\alpha(\beta)$. Man beweise
(a) $\alpha+\beta \in \mathrm{On}$.
(b) $0+\beta = \beta$.
(c) $\exists_{\alpha,\beta}(\alpha+\beta \neq \beta+\alpha)$.
(d) $\beta < \gamma \to \alpha+\beta < \alpha+\gamma$.
(e) Es gibt α, β, γ mit $\alpha < \beta$, aber $\alpha+\gamma \not< \beta+\gamma$.
(f) $\alpha \leq \beta \to \alpha+\gamma \leq \beta+\gamma$.

Aufgabe 26. Man beweise
(a) Für $\alpha \leq \beta$ gibt es ein eindeutig bestimmtes γ mit $\alpha+\gamma = \beta$.
(b) Ist β eine Limeszahl, so auch $\alpha+\beta$.
(c) $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$.

Aufgabe 27. Man zeige, daß $\mathcal{A}$ genau dann eine Menge ist, wenn es ein α gibt mit $\forall_{y\in\mathcal{A}}(\mathrm{rn}(y) \in \alpha)$.

Aufgabe 28. Es sei U ein nicht-leere Menge. $\Gamma \colon \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U)$ heißt *monotoner Operator* wenn $\forall_{x,y\subseteq U}(x \subseteq y \to \Gamma(x) \subseteq \Gamma(y))$. Ein $x \subseteq U$ heißt *Fixpunkt* von Γ wenn $\Gamma(x) = x$.
(a) Man zeige, daß jeder monotone Operator einen $\subseteq$-kleinsten Fixpunkt hat. (Hinweis: Man betrachte $x := \bigcap\{\, y \subseteq U \mid \Gamma(y) \subseteq y \,\}$).
(b) Man beweise den Satz von Cantor und Bernstein aus (a).

Abgabe. Mittwoch, 16. Juni 2010, in der Vorlesung.