Mathematisches Institut
der Universität München
Helmut Schwichtenberg

Sommersemester 2010
Blatt 6

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Logik II"

Aufgabe 21. Man zeige
(a) $\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha}(\beta+1)$.
(b) Für Limeszahlen α gilt $\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha}\beta$.
(c) Für $\alpha \neq 0$ gilt auch die Umkehrung in (b).

Aufgabe 22. Man zeige, daß für eine Relation $\mathcal{R}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind. Mit $\hat{x}$ bezeichnen wir $\{\, y \mid y\mathcal{R}x \,\}$.
(a) Das Induktionsprinzip

$$\forall_x(\forall_{y\in\hat{x}}A(y) \to A(x)) \to \forall_x A(x)$$

gilt für alle Formeln $A(x)$.
(b) Das Minimumprinzip

$$\exists_x A(x) \to \exists_x(A(x) \wedge \forall_{y\in\hat{x}}\neg A(y))$$

gilt für alle Formeln $A(x)$.

Aufgabe 23. Aus dem Prinzip der transfiniten Induktion über On

$$\forall_{\alpha\subseteq\mathcal{B}}(\alpha\in\mathcal{B}) \to \mathrm{On}\subseteq\mathcal{B}.$$

beweise man
(a) Die Null-Nachfolger-Limes-Form der transfiniten Induktion über On:

$$\begin{aligned}A(0) &\to \forall_\alpha(A(\alpha)\to A(\alpha+1))\\ &\to \forall_\alpha(\mathrm{Lim}(\alpha)\to\forall_{\beta\in\alpha}A(\beta)\to A(\alpha))\\ &\to \forall_\alpha A(\alpha).\end{aligned}$$

(b) Die transfinite Induktion über On, unter Verwendung aller Vorgänger:

$$\forall_\alpha(\forall_{\beta\in\alpha}A(\beta)\to A(\alpha)) \to \forall_\alpha A(\alpha).$$

(c) Das Prinzip vom kleinsten Element für On:

$$\exists_\alpha A(\alpha) \to \exists_\alpha(A(\alpha)\wedge\neg\exists_{\beta\in\alpha}A(\beta)).$$

Aufgabe 24. Es seien M eine Menge, $S\colon M \to M$ eine Funktion und $e \in M$. Wir nehmen an, daß (M,S,e) die Peano Axiome erfüllt, also

$$\begin{aligned}&\forall_x(Sx\neq e),\\ &\forall_{x,y}(Sx=Sy\to x=y),\\ &\forall_X(X\subseteq M\to e\in X\to\forall_y(y\in X\to Sy\in X)\to X=M).\end{aligned}$$

Man zeige, daß (M,S,e) isomorph ist zu $(\omega,\cdot{+}1,0)$, also daß es eine Bijektion $i\colon\omega\to M$ gibt mit $i(0)=e$ und $i(n+1)=S(i(n))$ für alle $n\in\omega$.

Abgabe. Mittwoch, 2. Juni 2010, in der Vorlesung.