

### Übungen zur Vorlesung "Mathematische Logik II"

**Aufgabe 17.** Es sei  $p_m(0) := 0$ ,  $p_m(n+1) := p_m(n) + m$  und  $m \cdot n := p_m(n)$ .  
Man zeige

- (a)  $m \cdot n \in \omega$ .
- (b)  $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$ .
- (c)  $(n + p) \cdot m = n \cdot m + p \cdot m$ .
- (d)  $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$ .
- (e)  $0 \cdot n = 0$ ,  $1 \cdot n = n$ ,  $m \cdot n = n \cdot m$ .

**Aufgabe 18.** Man beweise

- (a) Ist  $\mathcal{A}$  transitiv, so auch  $\bigcup \mathcal{A}$ .
- (b)  $\mathcal{A}$  ist transitiv genau dann, wenn  $\bigcup \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$ .
- (c)  $\mathcal{A}$  ist transitiv genau dann, wenn  $\mathcal{P}(\mathcal{A})$  transitiv ist.

**Aufgabe 19.** Für welche der folgenden Relationen  $\mathcal{R}$  auf  $\mathcal{A}$  existiert der Mostowski Isomorphismus  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  mit  $\mathcal{B}$  transitiv? Die Antwort ist zu beweisen, und im Fall daß der Mostowski Isomorphismus existiert sind  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{B}$  explizit anzugeben.

- (a)  $\mathcal{A} \subseteq \omega$  und  $\mathcal{R} = \mathcal{E}$  ( $= \{(x, y) \mid x \in y\}$ ).
- (b)  $\mathcal{A} = \{s \mid s: n \rightarrow 2 \text{ für ein } n \in \omega\}$  und  $\mathcal{R} = \{(a, b) \mid a \subsetneq b\}$ .
- (c)  $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 4, \{1, 4\}, \{1, 3, 4\}\}$  und  $\mathcal{R} = \mathcal{E}$ .
- (d)  $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f\}$  und (ein Bild ist hilfreich)

$$\mathcal{R} = \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (c, d), (c, e), (d, f), (e, f)\}.$$

**Aufgabe 20.** Eine Menge  $M$  heißt *endlich*, wenn es ein  $n \in \omega$  und eine Bijektion  $f: n \rightarrow M$  gibt.  $M$  heißt *\*-endlich*, wenn es für jedes nicht leere  $A \subseteq \mathcal{P}(M)$  ein  $a \in A$  gibt so daß kein  $b \in A$  mit  $a \subsetneq b$  existiert (d.h.,  $a$  ist ein  $\subseteq$ -maximales Element von  $A$ ). Man zeige:  $M$  ist endlich genau dann, wenn  $M$  \*-endlich ist.

**Abgabe.** Mittwoch, 26. Mai 2010, in der Vorlesung.