Mathematisches Institut
der Universität München
Helmut Schwichtenberg

Sommersemester 2010
Blatt 2

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Logik II"

Aufgabe 5. Es sei T eine axiomatisierte Erweiterung von Q. Für $\mathcal{L}_1$-Formeln A sei $\Box A := \mathrm{Thm}_T(\ulcorner A \urcorner)$. T erfülle

(Ab1): $T \vdash A \to \Box A$ (A geschlossene Σ_1-Formel der Sprache $\mathcal{L}_1$).
(Ab2): $T \vdash \Box(A \to B) \to \Box A \to \Box B$.

(Ableitbarkeitsbedingungen nach Hilbert-Bernays). Man zeige

(a) $T \vdash A$ impliziert $T \vdash \Box A$.
(b) $T \vdash \Box A \to \Box\Box A$,
(c) $T \vdash \Box(\Box C \to C) \to \Box C$ (formalisierter Satz von Löb),
(d) $T \vdash \mathrm{Con}_T \to \neg\Box \mathrm{Con}_T$ (formalisierter zweiter Unvollständigkeitssatz).

Aufgabe 6. Es sei $\mathcal{L}$ gegeben durch 0, S, $+$, $\cdot$, $\leq$ und $=$. Die Theorie R bestehe aus den Gleichheitsaxiomen $\mathrm{Eq}_{\mathcal{L}}$ sowie den Axiomen (für $a, b \in \mathbb{N}$)

$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{a+b} \qquad x \leq \underline{a} \to x = \underline{0} \lor x = \underline{1} \lor \cdots \lor x = \underline{a}$$
$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a \cdot b} \qquad x \leq \underline{a} \lor \underline{a} \leq x.$$
$$\neg(\underline{a} = \underline{b}) \quad \text{für } a \neq b$$

(a) Man konstruiere ein (klassisches) Modell von R, dessen Trägermenge aus allen Polynomen in einer Variablen besteht.
(b) Es sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Nachfolgerfunktion. Man gebe eine Formel $A(x, y)$ an, die in R den Graphen G_f von f repräsentiert, aber nicht f.

Aufgabe 7. Es sei $\mathcal{L}$ die Sprache der Theorie Q. Die Theorie Q_0 ist definiert wie Q, außer dem letzten der sieben Axiome, das ersetzt ist durch $x \neq 0 \to \exists_y(x = \mathrm{S}y)$. Sei $x \leq y := \exists_z(z + x = y)$.

(a) Man beweise in Q_0 alle Axiome von R (in Aufgabe 6).
(b) Man zeige, daß keine der Formeln $x \neq \mathrm{S}x$, $0 + x = x$, $x \leq x$, $0 \cdot x = 0$ in Q_0 beweisbar ist. (*Hinweis.* Man betrachte $\mathcal{M} = \langle U, 0, \mathrm{S}, +, \cdot \rangle$ mit $U := \mathbb{N} \cup \{\infty_0, \infty_1\}$, wobei $0, \mathrm{S}, +, \cdot$ auf $\mathbb{N}$ ihre gewöhnliche Bedeutung haben, und auf ∞_i ($i = 0, 1$) geeignet zu definieren sind.)

Aufgabe 8.

(a) Man zeige, daß jede rekursive Funktion in R repräsentierbar ist.
(b) Es sei $\mathcal{L}_0$ gegeben durch 0, S, $+$, $\cdot$ und $=$. Die Theorie Q_0 bestehe aus den Gleichheitsaxiomen $\mathrm{Eq}_{\mathcal{L}_0}$ sowie den sieben Axiomen

$$\mathrm{S}x \neq 0,$$
$$\mathrm{S}x = \mathrm{S}y \to x = y, \qquad x + 0 = x, \qquad x \cdot 0 = 0,$$
$$x \neq 0 \to \exists_y(x = \mathrm{S}y), \qquad x + \mathrm{S}y = \mathrm{S}(x + y), \qquad x \cdot \mathrm{S}y = x \cdot y + x.$$

Es sei T eine axiomatisierte konsistente Theorie, die Q_0 erweitert. Man zeige, daß sich eine geschlossene Formel A in $\mathcal{L}_0$ konstruieren läßt, für die weder A noch $\neg A$ in T beweisbar ist.

Abgabe. Mittwoch, 5. Mai 2010, in der Vorlesung.