Mathematisches Institut
der Universität München
Helmut Schwichtenberg

Sommersemester 2010
Blatt 1

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Logik II"

Aufgabe 1. (a) Es sei $\mathcal{L}$ die durch $+$, $\cdot$, $=$ bestimmte Sprache und $\mathcal{N}$ das Standardmodell. Man gebe $\mathcal{L}$-Formeln $A(x)$ und $B(x,y)$ an, so daß (i) $\mathcal{N} \models A[a]$ gdw $a = 0$ und (ii) $\mathcal{N} \models B[a,b]$ gdw $b = a + 1$.

(b) Es sei $\mathcal{L}$ die durch $+$, Sq, $=$ bestimmte Sprache und $\mathcal{N}$ das Standardmodell, wobei $\mathrm{Sq}(n) = n^2$. Man gebe eine $\mathcal{L}$-Formel $C(x,y,z)$ an, so daß $\mathcal{N} \models C[a,b,c]$ gdw $c = a \cdot b$.

Aufgabe 2. Es sei $\mathcal{L}$ die durch 0, S, $+$, $\cdot$, β, $=$, $<$ bestimmte Sprache und $\mathcal{N}$ das Standardmodell (mit β = Betafunktion).

(a) Man gebe eine $\mathcal{L}$-Formel $\mathrm{Power}(x,y,z)$ an, die die Relation $a^b = c$ in $\mathcal{N}$ definiert.

(b) Man gebe eine $\mathcal{L}$-Formel $\mathrm{Prime}(x)$ an, die die Menge der Primzahlen in $\mathcal{N}$ definiert.

(c) Man gebe eine $\mathcal{L}$-Formel $\mathrm{Pr}(x,y)$ an, die den Graphen der die Primzahlen aufzählenden Funktion in $\mathcal{N}$ definiert.

Aufgabe 3. Es sei $\mathcal{L}$ eine elementar präsentierte Sprache mit 0, S, $=$ in $\mathcal{L}$, und T eine konsistente axiomatisierbare $\mathcal{L}$-Theorie, die die Gleichheitsaxiome $\mathrm{Eq}_{\mathcal{L}}$ enthält. Mit Hilfe der Churchschen These zeige man, daß jede in T repräsentierbare Funktion $f \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ rekursiv ist.

Aufgabe 4. Es sei $\mathcal{L}$ eine elementar präsentierte Sprache mit 0, S, $=$ in $\mathcal{L}$, und T eine $\mathcal{L}$-Theorie, die die Gleichheitsaxiome $\mathrm{Eq}_{\mathcal{L}}$ und das ex-falso-quodlibet Axiom $\mathrm{Efq}_{=} \colon \forall_{x,y}(\bot \to x = y)$ enthält und für die gilt $T \vdash \underline{b} \neq \underline{c}$ falls $b < c$. Man zeige

(a) Ist eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^n$ repräsentierbar in T, so ist es auch ihre charakteristische Funktion c_R.

(d) $A(x_1, \dots, x_n, y)$ repräsentiert eine Funktion $f \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ in T genau dann, wenn $T \vdash A(\underline{a_1}, \dots, \underline{a_n}, y) \leftrightarrow y = f\underline{a_1} \dots \underline{a_n}$.

Abgabe. Freitag, 30. April 2010, in der Vorlesung, oder früher im Briefkasten im 1. Stock (am Mittwoch, 28. April 2010, fällt die Vorlesung aus).