Mathematisches Institut
der Universität München
Helmut Schwichtenberg

Sommersemester 2008
Blatt 8

Übungen zur Vorlesung „Diskrete Strukturen“

Aufgabe 29. Es seien M eine Menge und $f\colon M \to M$ eine Abbildung. Der Graph G_f von f ist die Relation

$$G_f := \{ (x,y) \mid f(x) = y \}.$$

(a) Man entscheide, ob
  (i) $G_{g\circ f} = G_f \circ G_g$
  (ii) $G_{g\circ f} = G_g \circ G_f$

  für alle $g\colon M \to M$ gilt, und begründe die Entscheidung durch einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel.

(b) Man zeige, daß $f = \mathrm{id}_M$ genau dann gilt, wenn G_f reflexiv ist.

(c) Kann G_f antireflexiv sein für ein bijektives f?

Aufgabe 30. Die Relation R werde durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man untersuche, ob R reflexiv, symmetrisch bzw. transitiv ist.

Aufgabe 31. Sei X eine nicht-leere Menge. Mit R, S bezeichnen wir Relationen über X, also $R, S \subseteq X \times X$.

(a) Man zeige: Sind R und S reflexiv (symmetrisch, transitiv), so auch $R \cap S$.

(b) Man zeige: Sind R_i ($i \in I$, I beliebige Indexmenge) reflexiv-transitive Relationen über X, so auch $\bigcap_{i\in I} R_i$. Man folgere hieraus, daß

$$R^+ := \bigcap \{ R' \mid R \subseteq R' \text{ und } R' \text{ transitiv} \}$$

$$R^* := \bigcap \{ R' \mid R \subseteq R' \text{ und } R' \text{ reflexiv-transitiv} \}$$

  eine transitive bzw. reflexiv-transitive Relation über X ist mit $R \subseteq R^+$ bzw. $R \subseteq R^*$. R^+ heißt die *transitive Hülle* von R und R^* die *reflexiv-transitive Hülle* von R.

(c) Man zeige, daß $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ die transitive Hülle von R ist.

(d) Man zeige, daß $\bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$ die reflexiv-transitive Hülle von R ist.

Aufgabe 32. Bestimmen Sie die transitiven Hüllen folgender Relationen über $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

(a) $R := \{ (x,y) \mid 1 \geq |x-y| \}$.

(b) $R := \{ (x,y) \mid 2 \mid (x-y) \}$.

(c) $R := \{ (x,y) \mid x < y \}$.

(d) $R := \{ (x,y) \mid y = x+1 \}$.

Abgabe. Dienstag, 24. Juni 2008, 14:15 Uhr, Briefkasten im 1. Stock