LÖSUNGSVORSCHLÄGE BLATT 10

Aufgabe 37.

Beweis. Sei $V = (1, \dots, n)$,$e \in E \Rightarrow e = \{k, k+1\} \vee e = \{n, 1\}$.

- „$\Rightarrow$“: $V = V_1 \cup V_2$, $V_{1/2}$ disjunkt, o.B.d.A.$1 \in V_1$. Dann ist $2 \in V_2$. Induktion über n gibt $2i \in V_2$ und $2i-1 \in V_1$. Damit $n = 2i \in V_2$ wegen $1 \in V_1$.
- „$\Leftarrow$“: Durchnumerierung wie vorher.

□

Aufgabe 38.

Beweis. Springerzüge führen von weißen auf schwarze Felder und umgekehrt. Das Feld ist endlich, also ergibt sich ein (endlicher) Graph der Züge mit den weißen Feldern V_1 und den schwarzen Feldern V_2, und den Springerzügen als Kanten. Etwa $\Gamma =(V, E)$ mit

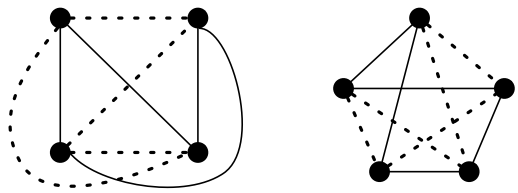
$$\begin{aligned} V &:= \{1, \dots, 8\} \times \{1, \dots, 8\} \\ E &:= \{\{x, y\} \subset V \mid |x_0 - y_0| = 2 \wedge |x_1 - y_1| = 1 \text{ oder } |x_0 - y_0| = 1 \wedge |x_1 - y_1| = 2\}. \end{aligned}$$

$(i, j) \in V_1$ falls $i + j$ ungerade ist, sonst $(i, j) \in V_2$. Aber bei einem Springerzug ändert sich $i + j$ um $\Delta = \pm 2 \pm 1$, aber Δ ist ungerade. Also gibt es keine Kanten zwischen V_1 und V_2. □

Aufgabe 39.

Beweis.

(a) $m = \frac{\frac{n^2-n}{2}}{2} = \frac{n^2-n}{4}$, also $4m = n(n-1)$. Entweder n oder $n-1$ muss durch 4 teilbar sein...



(b)

□

Aufgabe 40.

Beweis. Sei $\Gamma =(V, E)$ der Graph, nicht zusammenhängend, also etwa $V = V_1 + V_2$ ohne Kanten zwischen V_1 und V_2. Also:

$$|E| \leq \frac{n(n-1)}{2} - |V_1| \cdot |V_2| = \frac{n(n-1) - 2\,|V_1| \cdot |V_2|}{2} \leq \frac{n(n-1) - 2(n-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Mit $|E| > \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ kann Γ damit nicht zusammenhängend sein. □