LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Bachmann | PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN I | WS 2016/17
A. Dietlein, R. Schulte | ÜBUNGSBLATT 1 | 17. Oktober 2015

Der Inhalt dieses ersten Übungsblatts steht nicht direkt in Bezug zum Inhalt der ersten Vorlesungswoche. Die Aufgaben sind mehr eine Sammlung von im Verlauf der Vorlesung nützlichen Resultaten aus den Grundvorlesungen.

Definition. Für messbare Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definieren wir

$$\|f\|_p := \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \Big)^{1/p} \in [0, \infty].$$

Aufgabe 1 (Die Hölder-Ungleichung; 5 Punkte)**.** (a) Beweisen Sie die Youngsche Ungleichung: Für $a, b \geq 0$ und $p, q \in (1, \infty)$ mit $1/p + 1/q = 1$ gilt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

wobei Gleichheit genau dann gilt wenn $a^p = b^q$.

Tipp: Sie können z.B. die Konkavität des Logarithmus verwenden.

(b) Beweisen Sie die Hölder-Ungleichung: Für messbare Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $p, q \in [1, \infty]$ mit $1/p + 1/q = 1$ gilt

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Aufgabe 2 (Kugel-Koordinaten; 5 Punkte)**.** Zeige: Für integrierbare Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \Big(\int\limits_{\partial B(x_0, r)} f(x) dS_r(x) \Big) \mathrm{d}r,$$

wo S_r das Lebesguemass der Sphäre $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\} \subset \mathbb{R}^n$ ist.

Um Aussagen über (lokal-)integrierbare Funktionen zu machen, ist es oft von technischem Vorteil diese durch einfachere – bspw. glatte – Funktionen zu approximieren. Eine relativ stabil approximierende Folge erhält man z.B. durch Faltung mit einem sog. Glätter.

Definition. Für $f, g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ sodass für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ der Integrand in (1) absolut integrabel ist, ist die Faltung $g * f$ definiert als die (Äquivalenzklasse der) Funktion

$$(g * f)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x - y) f(y) \,\mathrm{d}y \qquad (x \in \mathbb{R}^n). \tag{1}$$

Aufgabe 3 (Faltung Teil 1; 5 Punkte)**.** (a) Zeige: Für $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ und $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ zeige, dass $\phi * f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ für die Faltung gilt, mit

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\phi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x-y) f(y) \, \mathrm{d}y \, .$$

Tipp: Für $h \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq n$ kann der Satz von der majorisierten Konvergenz auf den Differenzenquotienten $((\phi * f)(x + he_i) - (\phi * f)(x))/h$ von $\phi * f$ angewendet werden.

(b) Begründe kurz: Ist $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, so gilt auch $\phi * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 4 (Faltung Teil 2; 5 Punkte)**.** Sei $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq \phi$ und $\|\phi\|_1 = 1$ sowie $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Für $0 < \varepsilon$ sei $\phi^\varepsilon(\cdot) := \varepsilon^{-n}\phi(\varepsilon^{-1}\cdot)$ und $f^\varepsilon := \phi^\varepsilon * f$.
Zeige: Die Konvergenz $f^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} f$ gilt punktweise (Lebesgue-)fast überall.
Falls weiter $f \in C(\mathbb{R})$, so konvergiert f^ε sogar gleichmäßig gegen f auf allen kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Tipp: Hilfreich ist u.U. eine bekannte Aussage über Lebesgue-Punkte (lokal) integrierbarer Funktionen.

Das Übungsblatt kann bis spätestens **Montag, den 24. Oktober** um **16:00 Uhr** im dafür vorgesehenen Abgabekasten abgegeben werden.