Martin Schottenloher
Mathematisches Institut
der LMU, Zi. 437

Frühjahr 2010

Version 2.2

Programm für das Seminar

Langlands Correspondence

im Sommersemester 2010

Ziel, Inhalt, Stil

Es ist das Ziel des Seminars, die Formulierung und den Inhalt eines Teils der Langlands-Korrespondenz zu verstehen. Dabei sind mehrere verschiedene Gebiete der Mathematik beteiligt und es werden Ergebnisse und Methoden eingesetzt, die wir nicht alle im Detail erarbeiten können. Diese Ergebnisse und Methoden lassen sich in einem Semester auch nicht in linearer Weise aufeinander aufbauend abhandeln. Daher ist ein etwas ungewöhnlicher Ablauf des Seminars geplant, der auf das folgende Experiment hinausläuft: Zu den wichtigsten fundamentalen Methoden bzw. Theorien, die benötigt werden, wird jeweils einer der Teilnehmer bzw. Teilnehmerinnen 'Experte' (*) sein. Der Experte bzw. die Expertin (*) hat die Aufgabe, sich in sein bzw. ihr Gebiet einzuarbeiten und es im Laufe des Seminars einzubringen, wenn es angesagt ist.

Der Experte wird sein Gebiet in drei Phasen in das Seminar einbringen:

1. Kurzvortrag zu Beginn des Seminars: Die Methode wird kurz und in der Regel nicht in voller Allgemeinheit dargestellt, möglichst mit einem einfachen und bekannten Beispiel oder Resultat, und die Bedeutung für das Langlands-Programm wird angeschnitten. Beziehungen zu den anderen Methoden werden eventuell auch angesprochen. Vortragsdauer: 20 - 30 Minuten.

2. Der eigentliche Vortrag. Hier glänzt der Experte. Geplante Vortragsdauer: 90 Minuten.

3. Ergänzung und Unterstützung der anderen Vorträge, wenn die jeweilige Methode zur Anwendung kommt. Hier bewährt sich der Experte.

(*) 'Experte' steht im Folgenden für 'Expertin' oder 'Experte'.

Dabei wird weniger eine Vollständigkeit der behandelten Themen angestrebt als eine Herausstellung der wichtigsten Tatsachen und Methoden. Jeder Teilnehmer kann selber entscheiden, wieweit er in seinem Vortrag voranschreitet. Es ist aber sicherlich nötig, das wir uns frühzeitig absprechen, damit die eigentlichen Vorträge ein wenig aufeinander abgestimmt werden können. Der Inhalt des eigentlichen Vortrags ist für jeden Teilnehmer weitgehend frei. Ich habe unten nach der stichwortartigen Beschreibung der Methoden ein paar Vorschläge gemacht, die keineswegs erschöpfend sind und die eher in vielen Fällen elementar gehalten sind.

Beginn und Zusatzvorträge

Ganz zu Beginn des Seminars wird Herr Gerkmann einen Überblicksvortrag halten, der beschreibt, wohin die Reise geht. In einen zweiten Eingangsvortrag wird die Korrespondenz zwischen den kompakten Riemannschen Flächen, den endlichen algebraischen Erweiterungen des Körpers $\mathbb{C}(T)$ der rationalen Funktionen und den glatten algebraischen Kurven dargestellt (siehe [Mu1]), diesen Vortrag wird Frau Bild halten.

Danach kommen die Kurzvorträge, vielleicht 3 pro Sitzung. Dann haben genügend viele Abstimmungen stattgefunden, damit die eigentlichen Vorträge beginnen können. Die Reihenfolge wird noch (gemeinsam in den ersten Wochen des Semesters) bestimmt, aber die ersten drei werden vermutlich B, C und D (siehe unten) sein.

Zum Abschluss des Seminars in diesem Semester sollte dann noch ein weiterer Übersichtsvortrag stattfinden, der zusammenfasst, was wir gehört und erreicht haben.

Mitentscheidung

Sie sind aufgefordert, den Verlauf des Seminars auch organisatorisch mitzugestalten. Das beginnt damit, dass Sie die Zuteilung als Experte annehmen oder ablehnen. Das setzt sich fort, indem Sie die Tiefe und Allgemeinheit Ihres Vortrags bestimmen (und auch im Voraus kommunizieren). Weiterhin ist es denkbar, dass wir uns von vornherein auf den lokalen oder auf den globalen Fall konzentrieren. Wir könnten auch zu der Entscheidung kommen, dass wir jeder in seinem Fach genug Experte sind, so dass wir gemeinsam die arithmetische Theorie früh verlassen, um uns mit der geometrischen Langlands-Korrespondenz (siehe untern I, J, K) sehr bald und gründlicher auseinander zu setzen. Wir könnten uns auch ganz auf eine einzige Quelle einstellen, das macht vieles einfacher. Zum Beispiel könnten die einführenden Artikel in [BG] durchgearbeitet werden, oder das Buch [BH] wird als Grundlage des Seminars genommen, – das wäre weniger allgemein, aber mit kompletten Beweisen. Stellen Sie sich diesen Fragen, und beziehen Sie eine Position!

Vorbereitung

Jeder Teilnehmer benötigt ein Basiswissen in Algebra und in elementarer Algebraischer Zahlentheorie, in diesem Bereich sollte jeder Experte sein, siehe unten, Bereich A.

Jeder Teilnehmer sollte sich auf das Gesamtthema durch Lesen von Übersichtsartikeln einstellen. In der Artikelliste habe ich nur einige Übersichtsartikel genannt, die relevanten Forschungsartikel sind dann in diesen Übersichten zu finden. Zu den Übersichtsartikeln gehören auch die in [BG] zusammengestellten Artikel. Natürlich wird die Langlands-Korrespondenz auch in vielen der aufgelisteten Monographien angesprochen. Besonders in [GH] und [Bu], und weiter in [Hi, MP, ...]

Empfehlen kann ich den ersten Teil des Übersichtsvortrags [Fr2], der ganz im Sinne unseres Seminars geschrieben ist, wenn auch der Hauptteil dieses Artikels über die Konforme Feldtheorie noch zu weit führt. Weiterhin gibt [BG] eine sehr gute aktuelle und fundierte Einführung in unser Thema, in der die geometrische Vermutung allerdings nur eine kleine Rolle spielt.

Von großer Hilfe ist es, sich anschließend den Büchern zu widmen. Es sind wunderschöne Bücher unter den unten aufgelisteten, und meine Liste enthält längst nicht alle zu dem Thema. Sich in eines dieser Bücher zu vertiefen, bedeutet in der Regel, Experte zu werden. Vielleicht nicht in einem der unten festgesetzten Bereiche, aber in einem, das zum Thema des Seminars passt!

Experten

Methoden/Tools/Theorien der Experten (mit den jeweiligen Experten in eckigen Klammern):

A. Elements of number fields and Galois Theory [alle]
Jeder Teilnehmer sollte mit Körpererweiterungen vertraut sein und sich ein Grundwissen über die Algebraische Zahlentheorie erarbeiten, so dass in den Hauptvorträgen auf die folgenden Begriffe und Resultate aufgebaut werden kann: Galoistheorie wie in [Ar]. Endliche Körper. Quadratische Reziprozität. p-adische Zahlen. Beispiele von Körpererweiterungen und Galoisgruppen. (Z. B. wie im ersten Teil von [Se1]. Quadratische Körper und Kreisteilungskörper. (Alle diese Dinge findet man auch gut und elementar aufbereitet in den ersten zwei Dritteln von [IR] und auch in [Sa].) Soweit das Minimalwissen.

   Weitergehend ist es sinnvoll, sich in die Klassenkörpertheorie einzuarbeiten. Dazu findet man viele Bücher in der unten aufgeführten Liste. Gut gefällt mir die Darstellung in [Ne], dieses Buch ist allerdings viel mehr als nur eine erste Hinführung. Bekannt sollte auch die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ und die Gruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{ab}/\mathbb{Q})$ sein. Letztere Gruppe ist isomorph zum Limes der Einheitengruppen $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times}$.

B. L-Functions: Basic (Zeta, Dirichlet, Dedekind Zeta, Hecke, ...) [Marin Genov]
Vortragsthemen (z.B.): Dirichletreihen und ihr Konvergenzverhalten. Zetafunktion, Satz von Dirichlet über die unendlich vielen Primzahlen in arithmetischen Progressionen. Eulerprodukte als Ausgangspunkt verallgemeinerter L-Funktionen. Analytische L-Funktionen für GL_n [BG].

C. Modular Forms [Filip Bár]
Vortragsthemen (z.B.): Die Modulformen und Eisensteinreihen. Kuspen. Die Beispiele τ, Δ, ... und Ramanujan. Hecke-Operatoren ([He, BGHZ, Mi, Bu]). Der Ring der Hecke-Operatoren als Fusionsring. Evtl.: Kompaktifizierung von Quotienten der oberen Halbebene nach Modulgruppen und Uniformisierung. Finden wir alle kompakten Riemannschen Flächen als solche Quotienten? Finden wir alle kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht ≥ 2 als Quotient der oberen Halbebene nach einer geeigneten Äquivalenzrelation?

D. Elliptic Curves [Harald Kümmerle]
Vortragsthemen (z.B.): Elliptische Funktionen, die Weierstrass'sche p-Funktion. Elliptische Kurven über $\mathbb{C}$ [He], aber auch über allgemeinen Körpern [Hu]. Langlands-Korrespondenz und Satz von Fermat. Elliptische Kurven und Modulformen.

E. Galois group / abelian class field theory / class field theory [Georg Schüller]
Vortragsthemen (z.B.): Satz von Kronecker-Weber und seine Interpretation als eine Langlands-Korrespondenz [BG]. Analog die weitergehende Theorie, erst abelsch dann allgemein. Adele, Idele ([AT, Ne, Se3, We]). Artins Reziprozitätsabbildung [MP].

F. Representation Theory of Finite or Profinite Groups (and Compact Groups) / Fourier Analysis on Number Fields [Martin Schottenloher]
Vortragsthemen (z.B.): Darstellungstheorie kompakter Gruppen. Die natrliche Topologie auf der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Allgemeine Heckealgebra. Die Weil-Gruppe. Langlands-Korrespondenz für GL_n. ([Ne], [Bu], [We], [BH], [BG])

G. L-Functions: Advanced (L-Functions of Hecke, Artin, Langlands, ...) [Ralf Gerkmann]
Vortragsthemen (z.B.): Artins L-Funktion [BG] und L-Funktionen zu elliptischen Funktion wie zu Modulformen [BG]. Analytische L-Funktionen für GL_n [BG]. ... Artins L-Funktionen und evtl. Langlands Funktorialität ('functoriality') [Bu].

H. Automorphic Forms / Automorphic Representations [Christian Paleani]
Vortragsthemen (z.B.): Vergleich zu Modulformen, automorphe Darstellungen und Hecke-Eigenformen. Die Langlands-Korrespondenz [BGHZ, Bu, MP, BG].

I. Local Systems [Pascal Reisert]
Vortragsthemen (z.B.): Holonomie und lokale Systeme. Lokale Systeme und flache Zusammenhänge auf Vektorbündel. Riemann-Hilbert-Korrespondenz. Modulraum der Darstellungen von $\pi_1(X \backslash D)$ in einer reduktiven Gruppe G, wobei X eine algebraische Varietät ist und D ein Divisor. Galois-Darstellungen, d.h. Darstellungen von $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ als lokale Systeme auf $X \backslash D$. ([Fr1, Fr2, BG]). Evtl. $\mathcal{D}$-Moduln (3.5 und 3.6 in [Fr2]), Verzweigungen.

J. Geometric Langlands Correspondence [Kathrin Bild]
Vortragsthemen: Hier geht es um das geometrische Analogon der automorphen Darstellungen als Pendant zum geometrischen Analogen der Galoisdarstellungen (in I.). Beginn z.B.: Die Rolle der Fundamentalgruppe einer kompakten

Riemannschen Fläche X bzw. einer algebraischen Kurve als Galoisgruppe der durch X gegebenen Fundamentalgruppe (vgl. Thema des zweiten Eingangsvortrags und I.). Weiter nach Abschnitt 3 von [Fr2]: Adele und Vektorbündel: Vektorbündel als doppelter Quotient von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ (nach Weil). Von Funktionen zu Garben. Perverse Garben und $\mathcal{D}$-Moduln. Hecke-Eigengarben. Siehe [Fr1, Fr2, BG].

K. The Fundamental Group [Simon Lentner]
Vortragsthemen, (z.B.): Beginn: Kategorische Galoisgruppe. Die Fundamentalgruppe in der Algebraischen Geometrie. Zum Beispiel in [Hi]. Vergleich mit der klassischen Fundamentalgruppe.

L. Galois Cohomology [Daniel Harrer]
Siehe 'Cohomology of Number Fields' [NSW].

Weitere Gebiete, für die Experten gesucht werden (jeder Teilnehmer kann sich entscheiden, für ein weiteres Gebiet Experte zu werden.):

p-adic Fields [Ne, Hi]– Curves and Arithmetic Geometry [MP, Hi, Sh] – Theta Functions and Theta Series [Ig]– Kac-Moody Algebras – Loop Groups – Gauge Theory – Conformal Field Theory – Category Theory

Quellen

Übersichtsartikel:

Fr1 E. Frenkel: Recent Advances in the Langlands Program. BAMS (2003)

Fr2 E. Frenkel: Lectures on the Langlands Program and Conformal Field Theory (2005)

Fr3 E. Frenkel: Gauge Theory and Langlands Correspondence (Sem. Bourbaki) (2009)

Ge Gelbart: Elementary Introduction to the Langlands Program. BAMS (1984)

Go Goresky: Langland's Conjectures for phycisists.

Bücher:

Ar Artin: Galoissche Theorie.

AT Artin and Tate: Class Field Theory. Benjamin (1968)

BG Bernstein and Gelbart: An Introduction to the Langlands Program. Birkhäuser (2004)

Bu Bump: Automorphic Forms and Representations. Cambridge UP (1997)

BGHZ Bruinier, Geer, Harder, Zagier: The 1-2-3 of Modular Forms. Springer (2004)

BH Bushnell and Henniart: Local Langlands for GL(2). Springer (2006)

Fr E. Frenkel: Langlands Correspondence and Loop Groups. (2009); frei zum Download

GA Gelbart: Automorphic Forms on Adele Groups. AMS Studies (1975)

GS Gelbart and Shahidi: Analytic Properties of Automorphic L-Functions

GGP Gelfand, Graev and Pyatetskii-Shapiro: Representation Theory and Automorphic Functions

He Hellegouarch: Invitation to Fermat-Wiles. Academic Press

Hi H. Hida: p-Adic Automorphic Forms on Shimura Varieties. Springer (2004)

Hu Husemöller: Elliptic Curves. Second Edition.

Ig Igusa: Theta Functions. Springer (1972)

IR K. Ireland and M. Rosen: A Classical Introduction to Modern Number Theory. Springer (1972, 1984)

JL Jacquet and Langlands: Automorphic Forms on GL(2)

LV Lion and Vergne: The Weil representation, Maslov index and Theta Series

Mi T. Miyake: Modular Forms. Springer (1989)

Mo Moreno: Advanced Analytic Number Theory: L-Functions. AMS (2005)

MP Manin and Panchiskin: Introduction to Modern Number Theory. Springer (1990, 2003)

Mu1 D. Mumford: .. Jacobian

Mu2 Mumfords Tata Lectures on Theta I, II, and III

Ne Neukirch: Algebraische Zahlentheorie

NSW Neukirch, Schmidt, Wingberg: Cohomology of Number Fields. Springer (2000, 2008)

RV Ramakrishnan and Valenza: Fourier Analysis on Number Fields

Sa P. Samuel: Théorie Algébrique des Nombres. Hermann (1967)

Se1 J.-P. Serre: Course in Arithmetic. Springer (1973)

Se2 J.-P. Serre: Corps Loceaux.

Se3 J.-P. Serre: Groupes algébrique et corps de classes. Hermann (1959)

Sh G. Shimura: Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions. Princeton UP (1971)

We A. Weil: Basic Number Theory. Springer (verschiedene Auflagen ab 1967)

Das Seminar findet am Dienstag, 12 - 14 Uhr, im Raum B 251 statt.

Selbstverständlich kann man auch am Seminar teilnehmen, ohne einen Vortrag zu halten.