LMU
LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF.DR. M. SCHOTTENLOHER

01.02.2010

SEMINARANKÜNDIGUNG

Im kommenden Sommersemester 2010 veranstalte ich ein Seminar zu dem Thema

Hopf-Algebren als Erzeugende von Fusionsalgebren und topologischen Invarianten

(Darstellungstheorie von Hopf-Algebren, die mathematische Physik und TQFT's)

Bei diesem Seminar handelt es sich zuallererst um eine rigide, elementare Einführung in die Theorie der Hopf Algebren [1]. Der Schwerpunkt wird auf Strukturen liegen, welche auch in der Physik von Interesse sind. An vielen Stellen werden ausführlich die Verbindungen zu dort aktuellen Fragestellungen hergestellt. Von den Teilnehmern werden keine eigenen Vorträge erwartet (obwohl diese auf Anfrage willkommen sind!), sodass die Veranstaltung eher Kurs-Charakter haben wird.

Den Höhepunkt wird die explizite, kombinatorische Konstruktion einer Klasse von Invarianten von 3-Mannigfaltigkeiten bzw. Topologischen Quantenfeldtheorien nach Dijkgraaf/Witten [2] in der mathematisch rigiden Fassung von Wakui [3] aus einer Klasse von Quasi-Hopf-Algebren darstellen, die wir bereits zuvor ausführlich behandeln werden.

Der Stoff ist weitestgehend in sich abgeschlossen und richtet sich daher explizit an interessierte Mathematiker und Physiker ohne entsprechendes Vorwissen.

Programm (kursiv gesetzte Themen sind optional in Absprache mit den Teilnehmenden):

- Definition der Hopf Algebra, erste Eigenschaften, Beispiele k[G], Uq(sl2), Uq(g).

  Zur Hopf Algebra als Frobeniusalgebra (assoziatives Skalaprodukt), insbesondere das Casimir-Element, dessen Eigenwerte physikalisch etwa als Masse und Spin auftauchen. Berechnung des Zentrums von Uq(sl2) via HarishChandra-Homomorphismus.

- Überblick über Symmetriegruppen, Lie-Algebren und ihre (irreduziblen) Darstellungen als Teilchen der theoretischen Physik.

  Zum Lift von projektiven Darstellungen (Fermionen), Spin-Statistik.

- Elementare Darstellungstheorie von Hopf Algebren. Moduln über "braided" Hopf Algebren, wie Uq(g), sowie generell Yetter-Drinfel'd Moduln (z.B. über k[G]) ergeben vielfältige Beispiele für Braided Categories. Diese beider Konzepte werden über das Drinfeld-Doppel in Bezug gesetzt

  Wie hieraus Invarianten der Knotentheorie entstehen (z.B. das Jones-Polynom).

- Quasi-Hopf Algebren (mit kontrollierte nicht-Coassoziativität), nichttriviale Assoziativität in der braided Category (physikalisch die F-Matrix), Kategorien-Äquivalenz via Drinfeld twist (Eichtransformation). Beispiel: Dijkgraaf's Konstruktion einer Variation des Drinfeld-Doppels einer Gruppe vermöge eines 3-Cozykels. Physikalisch korrespondieren diese alle zu Fusionsringen mit nichttrivialer SpinStatistiken und hat findet daher Anwendungen auf Anyonen-Modelle und Quantencomputer.

  Zu Drinfelds (Twist-) Konstruktion einer Quasi-Hopf Algebra über k[[t]] aus Uq(g), womit er den Zusammenhang zur physikalisch/geometrischen Knizhnik–Zamolodchikov-Gleichung herstellen konnte und damit zur Konformen Quantum Field Theory. [4]

- Explizite kombinatorische Konstruktion einer Klasse von Topologischen Quantenfeldtheorien und damit Invarianten für 3-Mannigfaltigkeiten (vermöge einer beliebigen Triangulierung) aus o.g. Quasi-Hopf Algebra. Insbesondere ist die zugrundeliegene Gruppe physikalisch die endliche, nichtabelsche Eichgruppe einer Chern-Simons-Theorie- Dies liefert insbesondere eine Verlinde-Formel und die Dijkgraaf-Witten-Invarianten für 3-Mannigfaltigkeiten. Konkrete Berechung an Beispielen!

  Zur verwandten Konstruktion weiterer Topologischer Quantenfeldtheorien und der entsprechenden Turaev-Viro-Invarianten in [5] , via [6] letztlich aus Drinfeld-Twists von Uq(sl2). Dies war das frühere Resultat, ist aber rechnerisch deutlich aufwändiger und undurchsichtiger.

Literatur (zu Basis- und optionale Themen):

[1] C. KASSEL: Quantum Groups, 1994

[2] R. DIJKGRAAF and E. WITTEN: Topological gauge theories and group cohomology, 1990

[3] M. WAKUI, On Dijkgraaf-Witten Invariants for 3-Manifolds, 1991

[4] V. DRINFELD: 3 Papiere von '89-'90, aufbereitet in [1]

[5] V.G. TURAEV and O.Y. VIRO, State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols, 1991

[6] A.N. KIRILLOV and N.Yu. RESHETIKHIN, Representations of the algebra Uq.sl2/, q-orthogonal polynomials and invariants for links, 1988

Interessenten melden sich bitte bei mir, z.B. per Mail schotten@math.lmu.de
oder bei Simon Lentner SimonL314@gmx.de