Prof. Dr. M. Schottenloher 24.2.2005

Programm

zum Seminar im Sommersemester 2005

Geometrie in der Physik: Konforme Feldtheorie

Inhalt:

In vielen Bereichen der theoretischen Physik ist die Quantenfeldtheorie das wesentliche Konzept. Der mathematische Status der Quantenfeldtheorie ist allerdings nicht zufriedenstellend. Wir beschränken uns im Seminar auf die Konforme Feldtheorie, die aus verschiedenen Gründen eine komplettere mathematische Behandlung zuläßt.

Unter einer Konformen Feldtheorie wird eine konform invariante Quantenfeldtheorie in 2 $(1 + 1)$ Dimensionen verstanden. Zum Beispiel ist jede Stringtheorie eine Konforme Feldtheorie. Das Konzept der Konformen Feldtheorie tritt ferner auf bei der Analyse von kritischen Phänomenen der statistischen Mechanik.

Die konforme Feldtheorie zeichnet sich dadurch aus, dass sie unendlich viele unabhängige Symmetrien besitzt, die es ermöglichen, die Form der Korrelationsfunktionen und Operatorproduktentwicklungen direkt zu bestimmen, ohne dass Renormierungsansätze, Pfadintegrale, Perturbationen, etc. verwendet werden.

Was versteht man unter dem Begriff *Quantenfeldtheorie* bzw. *Konforme Feldtheorie*? Es kann keine erschöpfende Antwort auf diese Frage geben, ähnlich wie auch der Begriff der *Geometrie* sich im Rahmen der Mathematik nicht genau fassen läßt. Es handelt sich bei der Quantenfeldtheorie um ein Konzept von beachtlicher Flexibilität hinter dem große Erwartungen stehen, denn die ultimative physikalische Theorie, welche die Gravitation und Quantenphysik umfassen soll, wird sicherlich eine Quantenfeldtheorie sein. Außerdem hat die Quantenfeldtheorie der Mathematik sehr starke Impulse gegeben.

Wie werden wir im Seminar mit der Konformen Feldtheorie umgehen?

Ein wesentliches Ziel des Seminars ist es, einen Eindruck von dem Konzept der Konformen Feldtheorie zu gewinnen. Da es sich um ein mathematisches Seminar handelt, werden wir weitgehend mathematisch rigoros vorgehen.

Besonders attraktiv ist der Zugang zur Konformen Feldtheorie über die kritischen Phänomene der statistische Physik. Dieser Zugang ist zugleich mit vielen physikalischen Analogien und Intuitionen gepflastert und daher mathematisch nicht leicht fassbar. (Wir werden aber in dem parallel durchgeführten Seminar über SLE ein wenig darauf eingehen.) Vergleichsweise direkt ist der Zugang über die Stringtheorie, und wir werden das im Seminar als Spezialfall behandeln. Die Stringtheorie liefert aber nur einen kleinen Teil der Konformen Feldtheorie.

Wir wählen die axiomatische Methode! Dieser Weg zur Konformen Feldtheorie wird selten eingeschlagen, vor allem weil die von Wightman im Jahre 1964 aufgestellten Axiome bisher für den wichtigen vierdimensionalen Fall nur von trivialen Modellen erfüllt werden konnten (im zweidimensionalen Fall ist die Situation viel besser, wie wir sehen werden). Dieser Weg ist auch ein wenig riskant, weil die axiomatische Formulierung der Konformen Feldtheorie nicht so leicht in der Literatur zu finden ist. (Es kann sogar sein, dass wir dem noch etwas hinzufügen müssen.) Die mathematisch-physikalischen Forderungen der Begründer der konformen Feldtheorie (Belavin, Polyakov, Zamolodchikov [BPZ]) lassen sich aber aus mathematischer Sicht am besten verstehen, wenn sie in Form von Axiomen formuliert werden.

Aus diesem Grunde werden die Axiome einer zweidimensionalen Quantenfeldtheorie (Osterwalder, Schrader [OS]) zusammen mit Arbeiten von J. Fröhlich und Mitarbeitern [FFK] als die Grundlage der Vorträge im Seminar dienen. Mehr zu den Axiomen à la Wightman findet man in [Gaw], [Haa], [Lop], [Sim].

Sehr interessant sind auch andere axiomatisch orientierte Definitionen der Konformen Feldtheorie wie sie sich in [FB], [FS], [Gaw], [MS], [Ros], [Seg] finden. Ich empfehle, diese Arbeiten zum Vergleich heranzuziehen, nachdem Sie sich in Ihr Thema eingearbeitet haben!

Ziel des Seminars ist es darüber hinaus, von einer Reihe von Modellen der Konformen Feldtheorie zu zeigen, dass sie die dargestellten Axiome der Konformen Feldtheorie erfüllen. Dabei kommen die Modelle aus verschiedenen Bereichen der Physik oder der Mathematik, z. B. aus der Stringtheorie, aus der statistischen Mechanik, aus der Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra oder aus der Theorie der Vertexalgebren.

Aufbau und Organisation

Der eigentliche Inhalt konzentriert sich zunächst auf die Axiome nach Osterwalder-Schrader [OS] in einer für die Konforme Feldtheorie angepassten Modifikation wie von Fröhlich vorgeschlagen (in [FFK] oder [S]). Dabei werden die Axiome für die Korrelationsfunktionen formuliert und es gilt, den Hilbertraum dazu zu konstruieren (Rekonstruktion). Danach (und dabei) sollen verschiedene Modelle behandelt werden, die eine Konforme Feldtheorie im Sinne der Axiome liefern. Zuvor allerdings wollen wir einen Einstieg in das gesamte Thema finden, der vermittelt, was wir uns unter Quantenfeldtheorie vorstellen können, was eigentlich unter konformen Transformationen zu verstehen ist und warum die Virasoro-Algebra eine so wichtige Rolle in der Konformen Feldtheorie spielt.

Dieser Vorspann wird in 6 – 7 Einstiegsvorträgen dargestellt, die jeweils nur 30-45 Minuten lang sein sollen. Die Axiomatik beginnt dann im ersten Hauptvortrag. Für die Hauptvorträge ist jeweils ein Zeitrahmen von maximal 90 Minuten vorgesehen.

Aufgabe vor Beginn der Vorträge

Die Beispiele, an denen wir fortwährend die Axiome ausprobieren wollen, liegen noch nicht fest, abgesehen von dem bosonischen skalaren Feld (z.B. wie in [DMS]). Hier ist vorgesehen, dass Sie zur Auswahl der Beispiele beitragen und jede(r) mindestens einen Vorschlag macht. Bitte schicken Sie mir (oder gleich allen Teilnehmern) Vorschläge per Mail zu (in Stichworten). Damit eine Entscheidung früh genug gefällt werden kann, sollten die Vorschläge bis zum 7.4.2005 eingehen, ein paar Tage vor Semesterbeginn.

Kommentar zur Durchführung der Vorträge

Aus den nachfolgenden Beschreibungen der Vorträge wird bereits deutlich, dass die Vorträge einiges an Vorarbeit erfordern. Die Beschreibungen dabei dienen lediglich als Richtlinien, jede Teilnehmerin und jeder Teilnehmer kann den Inhalt innerhalb einer gewissen Grenze in Absprache mit mir abändern. Zum Beispiel, weil der Stoff zu viel wird, weil einige essentielle Passagen der Literatur nicht klar geworden sind oder weil ein interessanter Aspekt in der Beschreibung noch nicht genannt wird. Insbesondere ist es oft sinnvoll, sich auf Spezialfälle oder gar Beispiele zu konzentrieren, anstatt eine große Allgemeinheit der Aussagen und Beweise anzustreben. Es ist klar, dass aber einige wenige Vortragsteile bleiben müssen, die in den nachfolgenden Hauptvorträgen benötigt werden. Ansonsten ermuntere ich Sie von der Möglichkeit einer Änderung Gebrauch zu machen!

14 Tage vor den jeweiligen Vorträgen müssen Sie jeweils eine Skizze des Inhalts bei mir schriftlich abgeben, damit die Inhalte gegebenenfalls noch aufeinander abgestimmt werden können. Die ersten zwei Skizzen sollten daher am 7.4. (mit den Vorschlägen für die Beispiele) eintreffen.

Die Einstiegsvorträge

- **E1 Konforme Abbildungen** [Veretennikova]

  Der Begriff der konformen Abbildung, insbesondere für $\mathbb{R}^{p,q}$, mit Beispielen; Konzentration auf den Fall der euklidischen und der Minkowski-Ebene. Die konforme Gruppe für die letzten beiden Fälle und deren Kompaktifizierungen. (Z.B. in [Sch])

- **E2 Konforme Killingfelder** [Kremnitz]

  Die konformen Killingfelder sind die Vektorfelder, deren Fluss konforme Transformationen generiert; Klassifikation der konformen Abbildungen im Falle $\mathbb{R}^{p,q}$, insbesondere $q+p=2$; die konformen Gruppen dazu (ohne Beweis). (Z.B. in [Sch], siehe auch [BR], S. 406 ff, für die Generatoren der konformen Algebra in $3+1$ Dimensionen)

- **E3 Was ist Quantenfeldtheorie?** [Hecht]

  Eine Beschreibung einiger wesentlicher Ingredienzen einer QFT zur Übersicht: Quantenfeldtheorie als Quantisierung einer klassischen Feldtheorie (wie Elektrodynamik), als Theorie von operatorwertigen (s.a. Operatoren auf einem Hilbertraum) Distributionen auf einer Mannigfaltigkeit [GW], als Kollektion von Korrelationsfunktionen definiert auf ..., ... ; (z.B. in irgendeinem Lehrbuch über Quantenfeldtheorie, etwa [DMS], [Haa], [Hat], [Ka], [Lop]); evtl.: "State-Field-Correspondence", OPE-Algebren [Ros], ...

- **E4 Masselose klassische Felder sind konform invariant** [Alim]

  Diese Aussage soll motiviert werden, am besten an elementaren Beispielen (z.B. [BR], S. 413 ff).

- **E5 Die Virasoro-Algebra als Quantisierung von infinitesimalen konformen Transformationen der Ebene** [Lentner]

  Witt-Algebra und infinitesimale konforme Transformationen der Minkowski-Ebene und der euklidischen Ebene, Notwendigkeit der zentralen Erweiterung in der Quantenphysik, Eindeutigkeit der zentralen Erweiterung, alles z.B. wie in [Sch]. Erwähnen: Es gibt keine komplexe (unendlichdimensionale) Lie-Gruppe, deren Lie-Algebra die Virasoro-Algebra ist [Her].

- **E6 Darstellungen der Virasoro-Algebra** [Nitschke]

  Begriffe wie: Unitäre Darstellung, Höchstgewichtsdarstellung, Verma-Modul, alles für die Virasoro-Algebra. Unitarität und Kac-Formel, Nullvektoren, z.B. aus [Sch], siehe auch [KR] und [DMS]; "State-Field-Correspondence".

- **E7 Elementare Beispiele** [N.N.]

Die Hauptvorträge

- **H1 Osterwalder-Schrader-Axiome einer 2-dimensionalen euklidischen Quantenfeldtheorie** [Hecht]

  Der klassische Konfigurationsraum, die ersten drei Axiome: Lokalität, Kovarianz und Reflektionspositivität [OS, FFK, Sch]. Dazu mindestens zwei Beispiele, z.B. das freie Boson (siehe "Aufgaben", das jeweils geprüft werden. Physikalische Motivation der Forderungen. Kovarianz in Tensorformalismus. Kurzer Vergleich mit den Wightman-Axiomen [Sim], [Lop] (der kann auch in den nächsten Vortrag verschoben werden, bitte abstimmen!). Evtl.: Andere Definitionsbereiche, wie z.B. kompakte Riemannsche Flächen [Gaw].

- **H2 Rekonstruktion** [Kremnitz]

  Nach [OS], es müssen beide Arbeiten berücksichtigt werden. Es ist möglicherweise sinvoll, hier den analogen Satz von Axiomen für Felder (operatorwertige Distributionen) zu formulieren (vgl. [Sim], [Lop]) und auch die ursprünglichen Axiome von Wightman zum Vergleich heranzuziehen (s. E1). Interessant wäre auch eine Formulierung des Ganzen in der Minkowski-Signatur, die sich in nichtveröffentlichten Arbeiten von Lüscher und Mack befinden soll. Prozedur erläutern an den Beispielen.

- **H3 Skalierungskovarianz und Energie-Impuls-Tensor T** [Veretennikova]

  Hier beginnt die Konforme Invarianz der Theorie. Zum Beispiel in [Sch, FFK, auch Gaw], aber mit ausführlichen Beweisen. Insbesondere der Satz von Lüscher-Mack sollte angegangen werden. T erzeugt 2 unitäre Darstellungen der Virasoro-Algebra. Operatorproduktentwicklung von $T(z_1)T(z_2)$ und Vertauschungsregeln der L_n [Ka]. Jeweils testen an den Beispielen.

- **H4 Operatorproduktentwicklung und Fusionsregeln** [Lentner]

  Das letzte Axiom, zum Beispiel in [FFK, Sch]. Warum wird es „Bootstrap" genannt? Die Operatorproduktentwicklung (Assoziativität) sollte wieder an den Beispielen getestet werden. Fusion, Konforme Blöcke. Evtl. Beschreibung der Fusion durch Diagramme von Riemannschen Flächen [Gaw, Ka]; Evtl. rein algebraischer Fusionsring [Gan]; evtl. Ausblick auf die Formulierung der Konformen Feldtheorie im Rahmen von Vertexalgebren [FB] oder ganz anders in [Ros].

- **H5 Stringtheorie als Konforme Feldtheorie** [Alim]

  Die Stringtheorie als Konforme Feldtheorie soll ausführlich behandelt werden, wie z.B. in [Sch] und mehr, nämlich mit dem Nachweis, dass die Axiome erfüllt werden (siehe auch [Ka]). (Wenn der Vortrag H7 nicht stattfinden kann, soll nach Möglichkeit anschlieend ein Ausblick auf WZW-Modelle und σ-Modelle gegeben werden.

- **H6 Die minimalen Modelle** [Nitschke]

  Minimale Modelle aus Sicht der Kac-Formel, rationale Modelle, Coset-Konstruktion ([Ka] und [DMS]), siehe auch [Gaw]), mit dem Nachweis, dass die Axiome erfüllt werden. Verbindung zum Ising-Modell wie auch zum Potts-Modell. Charaktere [DMS] und Modulformen.

- **H7 WZW-Modelle und σ-Modelle** [N.N.]

  Etwa nach [DMS], [Gaw] oder [Ka] mit dem Nachweis, dass die Axiome erfüllt werden.

(Achtung: Der erste Termin am 14.4.2005 muss leider ausfallen, wir beginnen also am 21.4.2005, 16 Uhr, mit den zwei Einstiegsvorträgen E1 und E2.)

Literatur:

[BPZ] Belavin, Polyakov, Zamolodchikov: Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory, *Nucl. Physics* **B 241**, 1984, 533-380.

[BR] Barut, Raczka: *Theory of Group Representations and Applications*, PWN; 1977.

[DMS] Di Francesco, Mathieu, Snchal: *Conformal Field Theory*, Springer, 1996.

[FB] Frenkel, E, Ben-Zvi, D.: *Vertex Algebras and Algebraic Curves*, AMS, 2001

[FFK] Felder, Fröhlich, Keller: On the structure of unitary conformal field theory, *Comm. Math. Phys.* **124**, 1989, 417-463.

[FS] Friedan, D., Shenker, S.: The analytic geometry of two-dimensional conformal field theory. *Nucl. Physics* **B 281**, 1987, 509-545.

[Gan] Gannon, T.: Modular data: the algebraic combinatorics of conformal field theory. Preprint, `arXiv:math.QA/010344 v2`, 2002.

[Gaw] Gawedski, K.: *Lectures on Conformal Field Theory*, course at IAS Princeton, 1996

[GW] Garding, L., Wightman, A.S.: Fields and Operator-Valued D¿istributions in Quantum Field Theory, *Ark. für Physik* **28**, 1965, 129-184.

[Haa] Haag, R.: *Local Quantum Physics*, Springer, 1992.

[Hat] Hatfield, B.: *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings*, Addison-Wesley, 1989.

[Her] Herman, M.-R.: Simplicité du groupe de difféomorphismes de classe ..., *C.R. Acad. Sci. Paris* **273**, 1971, 232-234.

[Ka] Kaku, M.: *Strings, Conformal Fields, and Topology*, Springer, 1991.

[KR] Kac, V, Raina, A.K.: *Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Lie Algebras*, World Scientific, 1987.

[Lop] Lopuszanski, J.: *An Introduction to Symmetry and Supersymmetry in Quantum Field Theory*, World Scientific, 1991.

[OS] Osterwalder, K., Schrader, R.: Axioms for Euclidian Green's Functions I, II, *Comm. Math. Phys.* **31, 42**, 1973, 1975.

[MS] Moore, G., Seiberg, N.: Classical and Conformal Field Theory, *Comm. Math. Phys.* **123**, 1989, 177-254.

[Ros] Rosellen, M.: *OPE-Algebras*, `arXiv:math.QA/0209025`, 2002.

[Sch] Schottenloher, M.: *A Mathematical Introduction to Conformal Field Theory*, Springer LNP **m 43**, 1997.

[Seg] Segal, G.: The Definition of Conformal Field Theory, unpublished, 1988.

[Sim] Simon, B.: *The $P(\varphi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory*, Princeton UP, 1974.

[Uen] Ueno, K.: On Conformal Field Theory, in *Vector Bundles in Algebraic Geometry*, Cambridge UP, 1995.