Notiztitel 04.07.2011

6. Derivierte Kategorien

X sei wieder eine glatte Varietät. Ein D_X-Modul M heißt holonom :$\Leftrightarrow$ $\dim SS(M) = \dim X$ und M ist kohärent als $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe.

Dabei: $SS(M) \subset T^*M$ „singulärer Support, Wellenfront".

Ebenso gibt es den Begriff eines „regulären"* D_X-Moduls.

$\mathrm{Mod}_{rh}(D_X)$ ist die Kategorie der regulären und holonomen D_X-Moduln; $\subset \mathrm{Conn}(X)$

Fakt: $\mathrm{Conn}^{reg}(X) = \mathrm{Conn}(X) \cap \mathrm{Mod}_{rh}(D_X)$

$D^b_{rh}(D_X)$ Kategorie von Komplexen $M^\bullet \in \mathrm{Ob}(D^b_h(X))$ mit $H^i(M^\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Mod}_{rh}(D_X))$ $\forall i \in \mathbb{Z}$.

Thm (Kashiwara, Mebkhout, 80-84) Der deRham-Funktor

$$DR : D^b_{rh}(D_X) \longrightarrow D^b_c(X)$$

ist Äquivalenz von Kategorien.

Dazu: M sei D_X-Modul, $\Omega^\bullet(M) = \Omega^\bullet_X \otimes_{\mathcal{O}_X} M$, deRham-

---

* definiert über Abbildungen $E \longrightarrow X$ und auch algebraisch.

Komplex $\left(d(\omega \otimes m) := d\omega \otimes m + \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge \omega \otimes \partial_i m \right.$
in lokalen Koordinaten).

Für $\mathcal{F}$ quasikoh. D_X-Modul : Der Komplex $\Omega_X^\bullet(\mathcal{F})^{an}$

$$\mathcal{F}^{an} \to \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}^{an} \to \quad \dots \quad \to \Omega_X^{d_X} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}^{an}$$

ist Komplex von $D_{X^{an}}$-Moduln

Für $\mathcal{F}^\bullet \in D^b(D_X)$

$$\boxed{DR_X \mathcal{F}^\bullet = DR(\mathcal{F}^\bullet) := \Omega_X^\bullet(\mathcal{F}^\bullet)^{an}\,[d_X]}$$

Thm: DR liefert Äquivalenz zwischen $Mod_{rh}(D_X)$ und Kategorie der perversen Garben auf X^{an}.

Kurz: Eine Garbe $\mathcal{S}$ auf X^{an} heißt pervers, wenn es eine Stratifizierung $X^{an} \supset X_1 \supset \dots$ so gibt, daß alle $\mathcal{S}|_{X_i \setminus X_{i+1}}$ lokal konstante $\mathbb{C}_{X^{an}}$-Garben sind.

Literatur: Buch "Algebraic D-Modules" (AP, 1987), herausgegeben von A. Borel. Außerdem:
Hotta, Takeuchi, Tanisaki: D-Modules, Perverse Sheaves and Representation. Birkhäuser, 2008.