4. D-Moduln

Notiztitel 04.07.2011

Hiermit wird eine Wende zum Algebraischen eingeleitet (2-Transformation). Wir erinnern an den Begriff eines D_X-Moduls M auf einer glatten Varietät X über alg. abg. Körper K der Charakteristik 0, im Zweifelsfall $K = \mathbb{C}$.

D_X ist die Garbe der Differentialoperatoren auf X. Definiert als $\mathcal{O}_X$-Algebra erzeugt durch die Vektorfelder $\Theta_X = \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$:
In $x \in X$ ist bezüglich eines lokalen Koordinatensystems $x_1, \dots x_n$ und Basis $\partial_1, \dots \partial_n$ von $\Theta_{X,x}$ durch Ausdrücke der Form

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha \partial^\alpha \quad , f_\alpha \in \mathcal{O}_{X,x}) \quad \text{endliche Summation},$$

gegeben. D_X ist lokal frei vom Rang ∞.

Ein D_X-Modul M ist ein $\mathcal{O}_X$-Modul zusammen mit einer Linksaktion von Θ_X :

$$\Theta_X \times M \longrightarrow M .$$

Eine solche Linksaktion wird gegeben durch eine K-lineare Abbildung

$$\nabla : \Theta_X^{(H)} \longrightarrow \mathrm{End}_K(M) \,, \quad v \longmapsto \nabla_v \,,$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \nabla_{fv}(m) &= f\,\nabla_v(m) \\ \nabla_v(gm) &= v(g)\,m + g\,\nabla_v(m) \\ \nabla_{[v,w]} &= [\nabla_v, \nabla_w] \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &m \in M \\ &g, f \in \mathcal{O}_X,\ v, w \in \Theta_X^{(H)} \end{aligned}$$

Im Falle, das M also außerdem noch eine lokal freie $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe von endlichem Rang ist, bedeutet das:

$$\boxed{M \text{ ist hol. VB auf } X \text{ mit flachem Zusammenhang } \nabla.}$$

Fakt: M D_X-Modul und kohärent als $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann ist M lokal frei über $\mathcal{O}_X$ von endlichem Rang.

Bem.: D_X-Moduln M, die $\mathcal{O}_X$-kohärent sind, entsprechen genau den Systemen von lin. Diffoperatoren.

Generell wird vorausgesetzt, dass ein D_X-Modul wenigstens quasi-kohärent ist.

Literatur: Alles in A. Borel: Operations on Algebraic D-Modules in "Algebraic D-Modules", AP, 1987 (Editor: Borel)