# 3. Flache Vektorbündel

Notiztitel 04.07.2011

Von Bündeln aller Art war schon mehrfach die Rede. Hier geht es jetzt nur darum, die am Anfang des Ganzen stehende lineare Differentialgleichung

$$y' = Ay \quad , \quad A \in \mathcal{O}(\mathbb{P}_1 \setminus S, \mathbb{C}^{n\times n})$$

als Zusammenhang eines holomorphen Vektorbündels $E \to X = \mathbb{P}_1 \setminus S$ zu verstehen. Und zwar auf $E = X \times \mathbb{C}^n$. Zu dem Vektorfeld $\partial = \frac{d}{dz}$ muss nur die Wirkung von $\nabla_\partial : \Gamma(X,E) \to \Gamma(X,E)$ angegeben werden: Für $s(z) = (z, y(z))$, $z \in X$, sei

$$\nabla_\partial s(z) = \left(z, \frac{dy}{dz} + A(z)y(z)\right) = \left(z, \frac{dy}{dz}\right) + (z, A(z)y(z))$$
$$= \frac{d}{dz}s + As$$

und es gilt:

$$\nabla_\partial (fs) = \frac{df}{dz} \cdot s + f\nabla_\partial(s) . \qquad \left(\nabla_{h\partial} = h\nabla_\partial\right)$$

Damit ist $(E, \nabla)$ Vektorbündel mit Zusammenhang. $[\nabla_v, \nabla_w] = \nabla_{[v,w]} = 0$ für holomorphe Vektorfelder gilt aus Dimensionsgründen. Also ist der Zusammenhang flach.

Zu flachen Zusammenhängen hat man ebenfalls eine Monodromie. Weil Paralleltransport lokal wegunabhängig ist, liefert jedes $[\gamma] \in \pi_1(X)$ eine Monodromie $\rho([\gamma]) \in GL_n(\mathbb{C})$ durch Paralleltransport längs $\gamma$.

Nun ist allgemein ganz leicht zu zeigen, dass die folgenden 3 Mengen auf natürliche Weise zueinander bijektiv sind ($X$ eine beliebige Mannigfaltigkeit):

$$\mathrm{Hom}\left(\pi_1(X), GL_n(\mathbb{C})\right) / _{\text{Konjugation}}$$

$$\{\text{Lokale Systeme der Dimension } n \text{ auf } X\} / \sim$$

$$\{\text{Flache Zusammenhänge auf VB dim } n \text{ über } X\} / \sim$$

"$\sim$" Eichäquivalenz.

Bei dem Riemann-Hilbert-Problem geht es nicht darum, überhaupt einen Zusammenhang $\nabla$ zu finden, dessen Monodromie eine vorgegebene Darstellung $\rho \in \mathrm{Hom}(\pi_1(X), GL_n(\mathbb{C}))$ ist, sondern es geht darum, ein solches $\nabla$ mit möglichst regulärem Singularitätsverhalten bei allen $a_j \in S$ zu finden.