2. Der globale Fall

Notiztitel 03.07.2011

Im allgemeinen wird ein lokales System auf $X := \mathbb{P}_1 \setminus S$ gegeben durch eine Darstellung

$$\rho : \pi_1(X) \to GL_n(\mathbb{C})$$

Sei $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ die universelle Überlagerung. Die Aktionen von $\pi_1(X) \cong \mathrm{Deck}\,\tilde{X}$ auf $\tilde{X}$ bzw. $GL_n(\mathbb{C})$ (über ρ) führen zu dem $GL_n(\mathbb{C})$-Bündel

$$P := \tilde{P} \times_\rho GL_n(\mathbb{C}) \longrightarrow X :$$

$(t,g) \sim (t \cdot \sigma, \rho(\sigma^{-1}) g)$, $\sigma \in \mathrm{Deck}\,\tilde{X}$. Hier ist die Wirkung der Decktransformation σ als Rechtswirkung geschrieben und aufgefasst.

Wir erhalten insbesondere die holomorphe Abbildung

$$z : \tilde{X} \to P \quad , z(t) := [(t,1)], \ t \in \tilde{X},$$

mit der Invariante $\quad z(t\sigma) = \rho(\sigma)\, z(t) \qquad \forall \sigma \in \pi_1(X)$

$$z(t\sigma) = [(t\sigma, 1)] = [(t\sigma\sigma^{-1}, \rho(\sigma))] = \rho(\sigma)\,[(t,1)] = \rho(\sigma)\, z(t)$$

Weil X eine nichtkompakte Riemannsche Fläche ist, gibt es einen holomorphen Schnitt $s : X \to P$ $(\pi \circ s = id_X)$.

Zusammen mit $Z(t)$ findet man $\tilde{Y}(t) \in P$ durch

$$\tilde{Y}(t) := s(pt)^{-1} Z(t)$$

$\tilde{Y}$ ist holomorph, $\tilde{Y} : \tilde{X} \to P$, mit $\tilde{Y} \circ \sigma = \rho(\sigma) \tilde{Y}$ für alle $\sigma \in \mathrm{Deck}(\tilde{X}, X)$. Dann ist

$$A(z) := \frac{d\tilde{Y}}{dt}(t)\, \tilde{Y}(t)^{-1} = \frac{d\tilde{Y}}{dt}(\sigma t)\, \tilde{Y}(\sigma(t))^{-1}, \quad pt = z,$$

wohldefiniert und holomorph. Die Monodromie von $y' = Ay$ ist ρ, denn $\tilde{Y}$ ist Lösung von $Y' = AY$.

Bleibt die Regularität zu zeigen, bzw. es bleibt zu zeigen dass A auch noch regulär gewählt werden kann. Dazu braucht man Birkhoff-Grothendieck: Hol. VB $E \to \mathbb{P}_1$ sind von der Form

$$\mathcal{O}(l_1) \oplus \dots \qquad \dots \oplus \mathcal{O}(l_n)$$

Damit kann A durch Schnitte in E modifiziert werden. ($E \to \mathbb{P}_1$ ist Fortsetzung des zu $P \to X$ assoziierten hol. VB über X.*)

---

* z.B. in Anosov-Bolibruch, s.o.