1. Der lokale Fall

Es geht bei dem klassischen Riemann-Hilbert-Problem um die Monodromie auf der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ in Bezug auf endlich viele Punkte $S = \{a_1, \dots a_m\} \subset \mathbb{P}_1$.

Wir studieren zunächst den lokalen Fall mit $m = 1$, $a_1 = 0 \in \mathbb{E}^\times = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$.

Es sei eine lin. Differentialgleichung

$$* \qquad y' = Ay$$

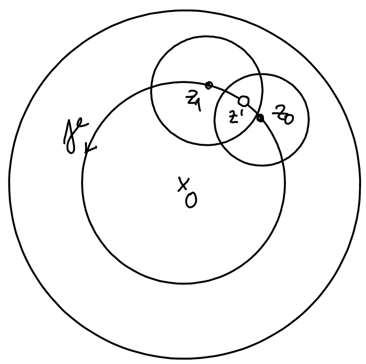
gegeben mit $A = (f_{ij})$ eine $(n \times n)$-Matrix von holomorphen $f_{ij} \in \mathcal{O}(\mathbb{E}^\times)$.
Zu jedem $z_0 \in \mathbb{E}^\times$ und $\overline{y} \in \mathbb{C}^n$ hat $*$ in

$$D(z_0, r) := \{z : |z - z_0| < r\} \quad \text{mit} \quad \overline{D(z_0, r)} \subset \mathbb{E}^\times$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $y = y(z)$,
$y \in \mathcal{O}(D(z_0, r), \mathbb{C}^n)$ von $*$ mit $y(z_0) = \overline{y}$
(AWP, Picard-Lindelöf).

Man erhält so zu einer Basis $\overline{y}_1, \dots \overline{y}_n$ von $\mathbb{C}^n$ ein Fundamentalsystem $y_1, \dots y_n$: $y_j' = Ay_j$ & $y_j(z_0) = \overline{y}_j$.

Was passiert, wenn y_j längs $\gamma(t) := z_0 e^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$, fortgesetzt wird?



In $D(z_1,s)$ mit $D(z_0,r) \cap D(z_1,s) \ni z'$ gibt es die eindeutig bestimmte Lösung $\tilde{y}$ von $y' = Ay$ mit $\tilde{y}(z') = y(z')$. Aufgrund der Eindeutigkeit auf $D(z_0,r) \cap D(z_1,s)$ stimmen y und $\tilde{y}$ dort überein und definieren daher auf $D(z_0,r) \cup D(z_1,s)$ eine Lösung $\tilde{\tilde{y}}$ von $*$ mit $\tilde{\tilde{y}}(z_0) = \bar{y}$, die wir wieder mit y bezeichnen wollen. Iteration dieses Ansatzes liefert lokale Lösungen in Kreisscheiben mit Mittelpunkt auf γ, die lokal zusammenpassen. Bei einem Umlauf längs γ wird die Lösung aber in der Regel mehrdeutig, und der Fortsetzungsprozess liefert eine lineare Abbildung

$$\bar{y} \longmapsto M\bar{y}, \quad M : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n; \qquad \tilde{y}(z_0) = M(\gamma)\,\bar{y}$$

M ist die <u>Monodromie</u> (von A). M liefert eine Darstellung

$$\rho : \pi_1(\mathbb{E}^\times, z_0) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow GL_n(\mathbb{C}), \quad \rho(k) = M^k, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Diese Darstellung wird ebenfalls Monodromie von $y' = Ay$ genannt. Wenn γ ersetzt wird durch eine in $\mathbb{E}^\times$ homotope Kurve β so ändert sich $M = M(\beta)$ nicht.
Bei Wahl eines anderen Anfangspunktes auf γ geht die Monodromie M in ein konjugiertes Element über.

> Riemann-Hilbert lokal: Gibt es zu $M \in GL_n(\mathbb{C})$ stets $A \in \mathcal{O}(D^\times, \mathbb{C}^{n\times n})$, so dass M die Monodromiematrix von $y' = Ay$ ist und A in 0 meromorph mit Pol der Ordnung ≤ 1 ist?

Plemelj 1908: Ja!

Wir wollen im Folgenden beschreiben, wieso es überhaupt eine Dgl. $y' = Ay$ mit Holonomie M gibt ($A \in \mathcal{O}(\mathbb{E}^\times, \mathbb{C}^{n\times n})$).

Es sei $\tilde{\mathbb{E}}^\times \xrightarrow[p]{} \mathbb{E}^\times$ die universelle Überlagerung von $\mathbb{E}^\times$.
Diese kann als $p : \mathbb{H} = \mathbb{R} \times]0,\infty[\to D^\times$, $p(t) := e^{2\pi i t}$, realisiert werden. Also für $t = \phi + ir \in \mathbb{H}$ ($\cong \tilde{\mathbb{E}}^\times$)

$$p(t) = e^{-2\pi r} e^{2\pi i \phi}.$$

Die Decktransformationen sind die $\sigma_k : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$,
$t \mapsto t + k$

Die lokalen Lösungen von $y' = Ay$ setzen sich zu einer mehrwertigen analytischen Lösung $\tilde{y} : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ zusammen mit der Invarianzeigenschaft

$$\tilde{y}(t+k) = M^k \tilde{y}(t) \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \text{ oder}$$

$$\tilde{y}(\sigma(t)) = \rho(\sigma)\, \tilde{y}(t) \qquad \forall \sigma \in \mathrm{Deck}(p : \mathbb{H} \to D^\times)$$

Man erhält so ein mehrdeutiges Fundamentalsystem

$$\tilde{Y} : \mathbb{H} \to GL_n(\mathbb{C}) \qquad \text{mit} \quad \tilde{Y} \circ \sigma = \rho(\sigma)\, \tilde{Y}$$

als vollständige Lösung von $y' = Ay$.

<u>Beobachtung</u>: A kann durch $\dfrac{d\tilde{Y}}{dt} \cdot \tilde{Y}^{-1} = A$ zurückgewonnen werden. Das ist der <u>Ansatz</u> zur Lösung des Riemann-Hilbert-Problems.

Wir wollen noch präzisieren, was <u>regulär singulär</u> für $y' = Ay$ bedeuten soll:

<u>Def</u>: $y' = Ay$, $A \in \mathcal{O}(E^\times, \mathbb{C}^{n\times n})$, ist <u>regulär singulär</u> :<=> für alle mehrwertigen Lösungen $\tilde{y} : \tilde{E}^\times \to \mathbb{C}^n$ von $y' = Ay$ gilt die folgende Bedingung: Zu $\theta_1 < \theta_2$ gibt es $\varepsilon > 0$,

sowie $C > 0$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle
$t \in [\theta_1, \theta_2] \times [-\frac{\log \varepsilon}{2\pi}, \infty[$ gilt:

$$|\tilde{y}(t)| \leq C\, |p(t)|^{-N}$$

Anders formuliert:

$$|y(z)| \leq C\, |z|^{-N} \quad \forall |z| < \varepsilon \text{ mit } \arg z \in [\theta_1, \theta_2]$$

Wenn $\tilde{y}$ schlicht, also nicht mehrdeutig ist, dann $M = id_{GL(n,\mathbb{C})}$ und die Abschätzung bedeutet für $\tilde{y} = y$:

$$|y(z)| \leq C\, |z|^{-N} \quad \text{für } 0 < |z| \leq \varepsilon \, .$$

Also ist y meromorph, da keine wesentliche Singularität vorliegt: $y(z)\, z^N$ hat hol. Fortsetzung nach $\mathbb{E}$, nach Hebbarkeitssatz von Riemann.

Konflikt: Plemelj — Bolibruch*

1. $n \leq 2$ oder $m \leq 3$: reg. sing. $\Leftrightarrow$ A nur Pole der Ordnung ≤ 1 in a_j

2. Im Allgemeinen nicht

---

* Anosov – Bolibruch: Riemann-Hilbert Problem. Vieweg 1994