# Riemann-Hilbert-Korrespondenz

Notiztitel 03.07.2011

## 0. Einleitung und Überblick

Riemann führte vor 150 Jahren „lokale Systeme" auf $\mathbb{P}^1 \setminus \{a_1, \dots, a_m\}$ ein. Wozu? Idee: Studium der linearen Differentialgleichung[(*)]

$$(P) \qquad Pu = 0 \quad , \quad P = \sum_{j=0}^{n} g_j \left(\frac{d}{dz}\right)^{(j)},$$

mit Koeffizienten $g_j \in \mathcal{O}(\mathbb{P} \setminus S)$, $S = \{a_1, a_2, \dots a_m\}$ mit Hilfe des lokalen Systems auf $\mathbb{P} \setminus S$, das die Lösungen von $Pu = 0$ erzeugen. Er wusste, dass das durch (P) definierte lokale System durch Matrizen $M_1, \dots, M_m \in GL(n, \mathbb{C})$ mit $M_1 M_2 \dots M_m = 1$ gegeben ist (wird in 1. & 2. erklärt).

Anwendung: Hypergeometrische Reihe (von Gauß) $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, das ist die Lösung von

$$z(z-1)\left(\frac{d}{dz}\right)^2 F + (\gamma + (\alpha + \beta + 1)z)\frac{d}{dz} F + \alpha\beta F = 0$$

Resultate in Riemanns Arbeit[(*)] fast ohne Rechnen.

Heutzutage: Theorie der rigiden lokalen Systeme (N.M. Katz)

---

(*) "Zwei allgemeine Lehrsätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten" (verfasst 1857; publiziert 1876 (Nachlass))

<u>Lineare Systeme</u>: $Pu = 0$ ordnet sich den linearen Systemen unter:

$$y' = Ay \qquad A \in \mathcal{O}(\mathbb{P}^1 \setminus \{a_1, \dots a_m\}, \mathbb{C}^{n \times n})$$

über $y_1 = u, y_2 = u', \dots y_n = u^{(n-1)}$. $p \longmapsto A^p \in \mathcal{O}(\mathbb{P} \setminus S, \mathbb{C}^{n \times n})$

<u>Hilberts 21. Problem</u> („<u>Riemann – Hilbert</u>"): Zeige dass jedes lokale System von einer DGl. $y' = Ay$ kommt mit $A \in \mathcal{O}(\mathbb{P}^1 \setminus S, GL_n(\mathbb{C}))$, $A$ merom. in $a_j$ $(j = 1, \dots m)$ mit Pol der Ordnung $\leq 1$. $S = \{a_1, \dots a_m\}$

<u>Lösung</u>: 1908 durch Plemelj (beinahe)
<u>Gegenbeispiel</u> 1989 durch Bolibruch

Wie das?

<u>Def</u>.: $y' = Ay$ regulär singulär (in $a_j$) $:\iff$ Lösungen von $y' = Ay$ wachsen ~~bei $a_j$ höchstens~~ polynomial für $z \mapsto a_j$ (Genaues am Ende von Abschnitt 1).

<u>Theorem von Fuchs</u> (1866): $y' = A^p y$ regulär singulär in allen $a_j$, $j = 1, \dots m$ $\iff$ $A^p$ meromorph in $\mathbb{P}_1$ mit Polen nur in $a_j$, $j = 1, \dots m$, der Ordnung $\leq 1$.

Bemerkung: Für allgemeine $A$ gilt nur „<=".

Plemeljs Beweis liefert surjektive Korrespondenz

$$\{\text{reg. sing. Systeme}\} \xrightarrow[\text{„Monodromie"}]{} \{\text{lok. Systeme}\}$$

## Weitere Entwicklungen:

1. Transformation der Korrespondenz (Röhrl ~ 1950): $y' = Ay$ „ist" holomorphes Vektorbündel $E$ über $\mathbb{P}_1 \setminus S$ mit flachem Zusammenhang $\nabla$.

2. Transformation ins Algebraische: $(E, \nabla)$ ist $D_X$-Modul.

3. Transformation in höhere Dimension (Deligne 1970): $X = \bar{X} \setminus S$, $S$ Divisor von glatter projektiver Varietät.
Korrespondenz: $\{(E,\nabla) \text{ auf } X, \text{„reg. bei } S\text{"}\} \longrightarrow \{\text{lok. Systeme auf } X\}$.

4. (finale) Transformation: $X \subset \bar{X}$ wie zuvor. Äquivalenz von Kategorien (Kashiwara, Mebkhout ~ 1984)

$$\boxed{\begin{array}{lcll} D^b_{rh}(D_{\bar{X}}) & \xrightarrow{\sim} & D^b_{cs}(\bar{X}^{an}) & \multirow{2}{*}{\Big\}\ \text{Äquivalenz von Kategorie}} \\ \mathrm{Mod}_{rh}(D_{\bar{X}}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Perv}(\bar{X}^{a}) & \end{array}}$$