Integrable Systeme in Mathematik und Physik

Notiztitel 06.11.2011

I. Einleitung

II. Ein einfaches System der klassischen Mechanik

III. Hamiltonsche Mechanik

IV. Vollständig integrable Systeme

V. Symmetrie und Marsden – Weinstein – Reduktion

I. Einleitung

Zu den wichtigsten Entwicklungen in Geometrie und in Topologie haben im 20. Jahrhundert neben den Ideen aus der Quantenphysik die integrablen Systeme beigetragen.

Dabei findet man in Mathematik und Physik viele verschiedene Ausprägungen des Begriffs „integrables System":

- In Mathematik die integrablen Systeme nach Frobenius, das sind Distributionen auf einer Mft M, d.h. Untervektorbündel $E \subset TM$ des Tangentialbündels, zu denen es lokal Untermfkten $X \subset M$ mit $E = TX$ gibt. Diese X sind die „Blätter" der durch die integrablen Distribution gegebenen „Blätterung".

- In der Physik spricht man in der klassischen Mechanik von (vollständig) integrablen Systemen, wenn es genügend viele Bewegungskonstante gibt, so dass sich der Phasenraum P in $\frac{1}{2}\dim P$-dimensionale invariante Untermfkten zerlegt (die dann oft 2dim. Tori sind). Der Zusammenhang mit dem Vorangehenden: Diese invarianten Untermfkten sind die Blätter eines integrablen Systems im Sinne von Frobenius. Diese vollständig integrablen Systeme der Mechanik sind unser Hauptthema in diesem Vortrag.

- Allgemeiner werden auch integrable Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden studiert. Das ermöglicht eine Lösungstheorie für bestimmte partielle Dglen wie z.B. die Korteweg-deVries-Gleichung (KdV, s.u.).

- In der Statistischen Physik heißen integrable Systeme meist „exakt lösbare Modelle"; bekannt sind in diesem Zusammenhang die „Yang-Baxter-Gleichungen" und „R-Matrizen".

• Die exakt lösbaren Systeme haben bereits eine Nähe zu den integrablen Quantensystemen.

Anwendungen der integrablen Systeme auf die Algebraische Geometrie hat es bereits sehr früh gegeben: Jacoby (1866) behandelt die Geodätischen eines Ellipsoids mittels der Abel-Transformation einer algebraischen Kurve.
Später: verallgemeinert von Novikov (~ 1970)
Später: verallgemeinert von Hitchin (1987*)

Vollständig integrable Systeme formuliert man im Rahmen der Hamiltonschen Mechanik, und damit werden wir in diesem Vortrag beginnen. Aber vorher wollen wir noch etwas ausholen und über allgemeine integrable Systeme bis zu den Quantenmodellen sprechen.

Ein großer Schritt ist die Einführung der "Methode der inversen Streuung" gewesen (~ 1960) und die Beschreibung von Lax der integrablen Systeme. Diese

---

* Hitchin: Stable bundles and integrable systems. Duke Math. J. 54 (1987), 91–114.
Von hier aus ist es nicht weit zu dem Modulraum der Higgsbündel, der ebenfalls ein integrables System ist: Das HITCHIN-System, das uns in diesem Seminar so sehr interessiert!

Beschreibung möchte ich hier ganz kurz vorstellen insbesondere auch deshalb, weil sie die Beziehung zur Geometrie und zur Algebra deutlich macht. Grundlage der Methode der inversen Streuung (auf die wir hier ansonsten nicht weiter eingehen) ist das Lax-System

Ein Lax-System (Lax Paar) ist zunächst.

$$\dot{L} = [M, L]$$

mit Matrix-wertigen Funktionen L und M (hier ist der Bezug zur Algebra/Geometrie durch die Lie-Klammer [,] gegeben). Das Modell der klassischen Mechanik ist hier durch den Phasenraum gegeben, der sich einbetten lässt in einen Raum von Matrix-wertigen Funktionen, so dass die Dynamik des Modells durch die obige Gleichung beschrieben wird.

Jedes „vollständig integrables System" ist lokal von dieser Form.

Bedeutende Verallgemeinerungen ergeben sich, wenn man unendlichdimensionale Systeme zulässt. Man kann auf diese Weise bestimmte partielle Dgln lösen und „Solitonen" bestimmen (KdV-Gleichung, Toda, ...).

<u>Beispiel</u>: KdV-Gleichung für $u = u(x,t)$

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx} .$$

Hier kommt man mit

$$M = -4\partial^2 + 3(u\partial + \partial u)$$
$$L = -\partial^2 + u$$

zur Form $\dot{L} = [M,L]$.

Dieser abstrakte Ansatz hat eine enge Beziehung zu r-Matrizen.
Im Quantenfall und in statistischen Modellen spricht man von exakten Lösungen. Man kommt zu <u>Yang-Baxter-Gleichungen</u>, R-Matrizen und topologischen Invarianten.

II. Einfaches System der klassischen Mechanik

1. Newtons Kraftgesetz im $\mathbb{R}^n$

$$m\ddot{q} = F(q,\dot{q},t) \qquad (n=3)$$

für Massenpunkt der Masse $m>0$ mit Koordinaten $q=(q^1,q^2,q^3)$. Im Falle eines Potentialfeldes F (d.h. im konservativen Fall)

$$F = -\nabla U,$$

$U: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diffbar, $\nabla U = (U_{q^1}, U_{q^2}, U_{q^3})$.

Die Gleichung ist von der Form

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial q},$$

(Euler-Lagrange-Gleichung), wenn $L = \frac{1}{2}v^2 - U$ mit $v = \dot{q}$.

Durch eine (sogenannte) Lagrangefunktion $L: Q \times \mathbb{R}^n$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ offen, wird dieselbe Euler-Lagrange-Gleichung

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial q}}$$

ein System der klassischen Mechanik gegeben:

- Q ist der Konfigurationsraum, $q \in Q$
- $Q \times \mathbb{R}^n$ ist der Phasenraum, er bestimmt die Kinematik
- die Euler-Lagrange-Gleichung bestimmt die Dynamik: Die Bewegungen des Systems sind die Lösungen der Euler-Lagrange-Glg, also die Kurven $q = q(t)$ mit:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}(q,\dot q,t) = \frac{\partial L}{\partial q}(q,\dot q,t) \quad \text{also ausführlich}^{(*)}:$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 L}{\partial v^k \partial q^j}(q,\dot q,t)\,\dot q^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^k \partial v^j}(q,\dot q,t)\,\ddot q^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^k \partial t}(q,\dot q,t) = \frac{\partial L}{\partial q^k}(q,\dot q,t)\,,\ k=1,\dots n}$$

Die Bedeutung der Euler-Lagrange-Gleichungen und die Berechtigung, diese Differentialgleichung (-ssysteme) als die Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik anzusehen, liegen in der Tatsache begründet, dass sie aus dem folgenden Variationsprinzip hergeleitet werden: $L : Q \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert als Lagrangedichte das (Wirkungs-)Funktional

---

(*) Dieses System von Differentialgleichungen kann in guten Fällen zu dem System

$$\ddot q = \Phi(\dot q, q, t)$$

umgewandelt werden: Wenigstens lokal durch Auflösung von

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}(q,\dot q,t) - \frac{\partial L}{\partial q}(q,\dot q,t) = 0 \qquad \text{nach } \ddot q.$$

$$\boxed{S(\gamma) := \int_I L(\gamma(t), \dot\gamma(t), t)\, dt}$$

für $\gamma : [t_0, t_1] \to Q$ zweimal stetig diffbar, $\gamma(t_0) = a_0$, $\gamma(t_1) = a_1$, $a_j \in Q$. Gesucht werden die Kurven $\gamma : [t_0, t_1] = I \to \mathbb{R}$ von $a_0 = \gamma(t_0)$ nach $a_1 = \gamma(t_1)$ (als Bewegungen des Systems), die das Funktional S stationär machen. Wenn L genügend glatt ist, lässt sich für Vergleichskurven

$$\gamma(t) + \varepsilon \eta(t) \qquad , \ \eta : I \to \mathbb{R}^n \ \mathcal{C}^2 \ \& \ \eta(t_i) = 0 \ , \ \varepsilon > 0,$$

die folgende Äquivalenz ganz leicht zeigen:

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(\gamma + \varepsilon\eta)\Big|_{\varepsilon=0} = 0 \iff \frac{d}{dt}\left(\frac{L(\gamma, \dot\gamma, t)}{\partial v}\right) = \frac{L(\gamma, \dot\gamma, t)}{\partial q} \ :$$

Beweis: Für η mit $\eta(t_i) = 0$ ist (L sei unabh. von t):

$$0 = \frac{\partial L}{\partial v^k} \eta^k \Big|_{t_0}^{t_1} = \int_I \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^k} \eta\right) dt = \int_I \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^k}\right)\eta^k + \frac{\partial L}{\partial v^k}\dot\eta^k\right) dt .$$

Eingesetzt in

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} S(\gamma + \varepsilon\eta)\Big|_{\varepsilon=0} = \int_I \frac{d}{d\varepsilon} L(\gamma + \varepsilon\eta, \dot\gamma + \varepsilon\dot\eta)\, dt \Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \int_I \left(\frac{\partial L(\gamma, \dot\gamma)}{\partial q^k} \eta^k + \frac{\partial L(\gamma, \dot\gamma)}{\partial v^k} \dot\eta^k\right) dt$$

folgt $\displaystyle 0 = \int \left(\frac{\partial L(\gamma, \dot\gamma)}{\partial q^k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L(\gamma, \dot\gamma)}{\partial v^k}\right) \eta^k \, dt$

für alle η. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Im Falle $L = T - U$ mit $T = \frac{1}{2} g_{ij} v^i v^j$ und $U = U(q)$ bedeuten die Euler-Lagrange-Gln (für (g_{ij}) eine symmetrische und invertierbare Matrix):

$$\boxed{\ddot{q}^k = -g^{kj} \frac{\partial U}{\partial q^j} \qquad k = 1, \dots n,}$$

wenn (g^{kj}) die zu (g_{il}) inverse Matrix ist: Denn

$\frac{\partial L}{\partial v^k} = g_{kj} v^j$ & $\frac{\partial L}{\partial q^k} = -\frac{\partial U}{\partial q^k}$, also

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v^k} = \frac{\partial L}{\partial q^k} \iff g_{kj}\ddot{q}^j = -\frac{\partial U}{\partial q^k} \iff \ddot{q}^k = -g^{kj}\frac{\partial U}{\partial q^j}.$$

Analog mit von q abhängigen $g_{ij} = g_{ij}(q)$.

Beim Zentralfeld im $\mathbb{R}^3$, d.h. $g_{ij} = m\delta_{ij}$ und $U(q) = V(|q|^2)$ ist

$$m\ddot{q} = -\nabla U = -2V'(|q|^2)\,q$$

die Bewegungsgleichung, also sind q und $\ddot{q}$ linear abhängig. Daher ist $I = q \times mv$ Bewegungskonstante:
$\frac{d}{dt} I = \frac{d}{dt}(q \times m\dot{q}) = \dot{q} \times m\dot{q} + q \times m\ddot{q} = 0 + q \times m\ddot{q} = 0.$

Die Bewegungskonstanten, die uns ganz allgemein in der Klassischen Mechanik sehr interessieren, lassen sich hier verstehen, als von 1-Parametergruppen wie

$$s \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos s & -\sin s \\ 0 & \sin s & \cos s \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad s \longmapsto \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s & 0 \\ \sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt. Genauer:

Def: Eine 1-Parametergruppe (φ_s) auf einer Mft Q ist eine Familie $(\varphi_s)_{s\in\mathbb{R}}$ von Diffeomorphismen $\varphi_s : Q \to Q$ mit

- $\mathbb{R}\times Q \to Q$, $(s,q) \mapsto \varphi_s(q)$, ist diffbar, und
- $\varphi_{s+t} = \varphi_s \varphi_t$ für alle $s,t \in \mathbb{R}$.

Def. Eine 1-Parametergruppe (φ_s) auf einer offenen Teilmenge $Q \subset \mathbb{R}^n$ heißt Symmetrie des Lagrange-Systems (TQ, L) ($L : TQ \to \mathbb{R}$ Lagrangefktion), wenn für alle $s \in \mathbb{R}$:

$$L(\varphi_s q, D\varphi_s(q).v) = L(q,v), \quad (q,v) \in Q \times \mathbb{R}^n = TQ.$$

Satz von Noether: Sei (φ_s) Symmetrie von (TQ, L) mit infinitesimalen Erzeuger X. Dann ist

$$I_X := \frac{\partial L}{\partial v} X \quad \text{eine Bewegungskonstante.}$$

Bew.: Der infinitesimale Erzeuger ist

$$X(q) := \frac{d}{ds}\varphi_s(q)\Big|_{s=0} \in \mathbb{R}^n, \text{ für } q \in Q.$$

$X : Q \to \mathbb{R}^n$ ist als Vektorfeld $q \mapsto (q, X(q)) \in TQ$

zu verstehen. Sei $q = q(t)$ Bewegung des Systems,
also $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}(q,\dot q)\right) = \frac{\partial}{\partial q}(q,\dot q)$.

Dann

$$\frac{d}{dt} I_X(q) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^k}(q,\dot q)\, X^k(q)\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(\varphi_s q, D\varphi_s(q)\cdot\dot q)}{\partial v^k}\, \frac{d}{ds}\varphi_s(q)\Big|_{s=0}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(\varphi_s q, D\varphi_s(q)\cdot\dot q)}{\partial v^k}\right)\frac{d}{ds}\varphi_s(q)\Big|_{s=0} + \frac{\partial L(\varphi_s q, D\varphi_s(q)\cdot\dot q)}{\partial v^k}\,\frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\varphi_s(q)\Big|_{s=0}$$

$$= \frac{\partial L(\varphi_s q, D\varphi_s(q)\cdot\dot q)}{\partial q^k}\,\frac{d}{ds}\varphi_s(q)\Big|_{s=0} + \frac{\partial L(\varphi_s q, D\varphi_s(q)\cdot\dot q)}{\partial v^k}\,\frac{d}{ds}\left(\frac{d}{dt}\varphi_s(q)\Big|_{s=0}\right)$$

$$= \frac{d}{ds}\,\partial L(\varphi_s q, D\varphi_s(q)\cdot\dot q)\Big|_s \;\ldots \quad \text{wegen } \frac{d}{dt}\varphi_s(q) = D\varphi_s(q)\cdot\dot q$$

$$= 0 \quad \text{wegen Symmetrie.} \qquad \square$$

<u>Bemerkung</u>: 1) Gilt allgemeiner für Vektorfelder X mit

$$\frac{\partial L}{\partial q}X + \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial q}v = 0 \qquad (\text{infinitesimale Symmetrie})$$

2) Gilt analog für (TQ, L) mit Q allg. Mft.

Beispiel (zur Überleitung zur Hamilton-Mechanik):
Setzen wir jetzt in unserem Beispiel $L = \frac{1}{2} g_{ij} v^i v^j - U(q)$

$$p := \frac{\partial L}{\partial v}, \quad p_k = g_{jk} v^j, \quad (p \text{ ist der „Impuls"}),$$

so gilt $v^j = g^{jk} p_k$, und die oben hergeleitete
DGL 2. Ordnung $\ddot q^k = -g^{kj}\frac{\partial U}{\partial q^j}$ wird zu dem
System 1. Ordnung:

$$\dot q^k = g^{kj} p_j \quad , \quad \dot p_k = -\frac{\partial U}{\partial q^k} \, , \quad k = 1, \ldots n$$

Oder mit $H(q,p) = \frac{1}{2} g^{kj} p_k p_j + U$:

$$\boxed{\dot q = \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q} \, .} \qquad \text{(Hamiltonsche Gln.)}$$

Uns interessieren die Erhaltungsgrößen, bzw. Bewegungsinvarianten, 1. Integrale, ... d.h. Funktionen $I : Q \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ auf dem Phasenraum mit $I(q(t), \dot q(t)) = 0$ für jede Bewegung $q(t)$ (i.e. Lösung der Euler-Lagrange-Gln.).

Im Beispiel ist H eine Bewegungsinvariante.

Beispiel: Der harmonische Oszillator in n Freiheitsgraden ist durch $L(q,v) = \frac{1}{2}(v^2 - q^2)$ $\left(v^2 = \sum_{j=1}^{n} (v^j)^2 \text{ und } q^2 \text{ analog} \right)$ gegeben, mit den Bewegungsgleichungen $\ddot q = -q$, oder durch $H(q,p) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ mit den Hamiltonschen Gleichungen $\dot q = p$, $\dot p = -q$. Neben der totalen Energie H sind auch die Teilenergien

$$E_k(q,p) = \frac{1}{2}(q^k + p_k) = \frac{1}{2}(q^k + v^k), \; k = 1,2, \ldots n .$$

Bewegungskonstanten. Im Lagrangeformalismus sieht man das direkt: $\frac{d}{dt} E_k(q,v) = q^k \dot q^k + \dot q^k \ddot q^k = q^k \dot q^k - \dot q^k q^k = 0$ $(\ddot q = -q)$ und im Hamiltonformalismus wegen $\frac{d}{dt} E_k(q,p) = q^k \dot q^k + p_k \dot p_k = q^k p_k - p_k q^k = 0$ $(\dot q = p, \dot p = -q)$. E_k kann im Lagrangeformalismus nicht durch eine Symmetrie $\varphi_s : Q \to Q$ (siehe Satz von Noether) gewonnen werden, aber durch eine Symmetrie $\psi_s : T^*Q \to T^*Q$ im Hamiltonformalismus (siehe Abschnitt $\underline{V}$).

III. Hamiltonsche Mechanik

Die Phasenräume der Hamiltonschen Mechanik sind die symplektischen Mannigfaltigkeiten. Das sind diffbare Mannigfaltigkeiten M zusammen mit einer Differentialform $\omega \in \mathcal{A}^2(M)$, die nicht ausgeartet und geschlossen ist. Also ist die Matrix $\omega_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $\omega|_U = \omega^{ij} dx^i \wedge dx^j$ in lokalen Koordinaten auf $U \subset P$, eine invertierbare Matrix.

Weil ω nicht ausgeartet ist, muss die Dimension gerade sein, etwa $\dim M = 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Es ist dann $\omega^n = \omega \wedge \omega \wedge \ldots \omega \neq 0$ eine Volumenform.

<u>Beispiel</u>: Sei Q eine diffbare Mft der Dimension n. Dann ist das Kotangentialbündel $P = T^*Q$ eine symplektische Mft der Dimension $2n$.
Bezüglich einer Karte

$$\varphi = (q^1, \ldots q^n) : U \to V \subset \mathbb{R}^n$$

ist

$$\check{\varphi} = (q^1, \ldots q^n, p_1, \ldots p_n) : T^*U \to V \times \mathbb{R}^n$$

eine Bündelkarte, wobei für $\alpha \in T_a^*M$, $a \in U \subset M$, die Funktion $p_j : T^*U \to \mathbb{R}$ durch

$$p_j(\alpha) := \alpha\left(\frac{\partial}{\partial q^j}\right) \in \mathbb{R}$$

gegeben ist.
Die zugehörige symplektische Form ω auf T^*Q ist in diesen Koordinaten durch

$$\omega|_U = dq^k \wedge dp_k \qquad (\text{manchmal } dp_k \wedge dq^k)$$

definiert (unabhängig von Karten). ω ist sogar exakt: $\omega = d\lambda$ mit $\lambda|_U := -p_k dq^k$. Die (wohldefinierte(!)) 1-Form $\lambda \in \mathcal{A}^1(T^*M)$ heißt auch die Liouville-Form.

Satz von Darboux: Sei (M, ω) eine symplektische Mft. Dann gibt es zu jedem Punkt aus M eine Koordinatenumgebung $U \subset M$ mit Koordinaten $\varphi = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots p_n) : U \to V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, so dass

$$\omega|_U = dq^k \wedge dp_k .$$

Solche Karten heißen kanonische Koordinaten.

<u>Fakt:</u> Sei (P,ω) eine symplektische Mft.

1° Zu $H \in \mathcal{E}(P)$ existiert eindeutig ein Vektorfeld $X_H \in \Gamma(P, TP) = \mathcal{D}(P)$ mit

$$\omega(X_H, Y) = dH(Y) \qquad \forall Y \in \mathcal{D}(P)$$

H wird Hamiltonfunktion genannt und X_H das zugehörige Hamiltonsche Vektorfeld.

X_H ist der symplektische Gradient von H.

Im kanonischen Koordinaten gilt:

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial q^k} - \frac{\partial H}{\partial q^k}\frac{\partial}{\partial p_k}.$$

Denn

$$\omega(X,Y) = dq^k(X)\,dp_k(Y) - dq^k(Y)\,dp_k(X)$$
$$= X^k Y_k - Y^k X_k$$

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q^k} dq^k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k$$

$$dH(Y) = \frac{\partial H}{\partial q^k} Y^k + \frac{\partial H}{\partial p_k} Y_k \quad \overset{!}{=} \quad X_H^k Y_k - (X_H)_k Y^k$$

Aus der Identität:

$$\omega(X_H, Y) = X_H^k Y_k - (X_H)_k Y^k = \frac{\partial H}{\partial p_k} Y_k + \frac{\partial H}{\partial q^k} Y^k$$

folgt die Behauptung: $\quad X_H{}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad (X_H)_k = -\frac{\partial H}{\partial q^k}$

2° Die Hamiltongleichung ist

$$\dot{x} = X_H(x), \quad x = x(t) \text{ Kurve in } M,$$

und die Lösungen $x : I \to M$ dieser DGl. sind die Bewegungen des Hamiltonschen Systems (M, ω, H). In kanonischen Koordinaten hat die DGl. die Form (für $x = (q^1, .. q^n, p_1, .. p_n)$):

$$\boxed{\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial q} \quad , \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial p}}$$

Def: (M, ω) sei sympl. Mft. Für $F, G \in \mathcal{E}(M)$ setze

$$\{F, G\} := \omega(X_F, X_G).$$

$\{\ ,\ \}$ ist die Poissonklammer.

In kanonischen Koordinaten

$$\{F, G\}|_U = \frac{\partial F}{\partial q^k}\frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial G}{\partial q^k}$$

SATZ: (M, ω) sei sympl. Mft.

1° $\varphi : (M, \omega) \to (M', \omega')$ ist kanonische Transformation (oder Symplektomorphismus), d.h. φ Diffeomorphismus und $\varphi^*\omega' = \omega$ $\iff$ φ erhält die Poissonklammern

2° $\mathcal{E}(M)$ ist in Bezug auf $\{\ ,\ \}$ eine unendlichdimensionale Lie-Algebra mit

$$\{F\cdot G, I\} = F\{G, I\} + \{F, I\}G \qquad \forall F, G, I \in \mathcal{E}(M).$$

3° Sei (M, ω, H) Hamiltonsystem.

i) Für eine Kurve $\gamma = \gamma(t)$ gilt: γ ist Bewegung von $(M, \omega, H) \iff \frac{d}{dt}\left(F\circ\gamma(t)\right) = \{F\circ\gamma(t), H\circ\gamma(t)\}$ für alle $F \in \mathcal{E}(M)$ (Kurz:

$$\boxed{\dot{F} = \{F, H\},} \quad (*)$$

die Hamiltonschen Bewegungsgln in Poissonform.)

ii) $F \in \mathcal{E}(M)$ ist Bewegungskonstante des Systems (M, ω, H), d.h. $\frac{d}{dt}(F\circ\gamma) = 0$ für alle Bewegungen $\gamma \iff \{F, H\} = 0$.

iii) Sei φ_t^H der Fluss(**) zu X_H, ist. Dann ist φ_t^H kanonische Transformation.

(*) vgl. Lax-Paar (Abschnitt I).

(**) Sei X ein Vektorfeld auf einer Mft, dann hat das Anfangswertproblem $\dot{\gamma} = X(\gamma)$, $\gamma(0) = a$, stets eine eindeutig bestimmte maximale Lösung $\gamma = \gamma_a : I(a) \to M$ auf einem offenen Intervall $I(a) \subset \mathbb{R}$. Die Lösungsschar $\left(\gamma_a(t)\right)_{a\in M}$, $t \in I(a)$, bestimmt den Fluss $\varphi_t^X(a) := \gamma_a(t)$, der mit $M_t := \{a \in M \mid t \in I(a)\}$ als Schar $\varphi_t^X : M_t \to M_{-t}$ von Diffeomorphismen verstanden wird (M_t ist offen & $\varphi_t^X \circ \varphi_s^X(q) = \varphi_{t+s}^X(q)$ für $q \in M_s \cap M_{t+s}$, $\varphi_s^X(q) \in M_t$). $(\varphi_t^X)_{t\in\mathbb{R}}$ ist eine lokale 1-Parametergruppe. Im Falle $M_t = M$ für alle $t \in \mathbb{R}$ heißt das Vektorfeld X vollständig. Für vollständige X ist (φ_t^X) also eine 1-Parametergruppe.

iv) (Satz von Poisson) $F, G \in \mathcal{E}(P)$ Bewegungskonstante $\Rightarrow \{F, G\}$ Bewegungskonstante.

v) (Satz von Noether). F Bewegungskonstante von (M, ω, H) $\Leftrightarrow$ $H \circ \varphi_t^F = H$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Bew. zum Beispiel zu v): F Bew. konstante von (M, ω, H) $\Leftrightarrow$ H Bewegungskonstante von (M, ω, F) $\Leftrightarrow$ $\frac{d}{dt}(H \circ \varphi_t^F) = 0$ $\Leftrightarrow$ $H \circ \varphi_t^F = H$. □

Eine andere Formulierung des Noetherschen Satzes:

<u>Satz von Noether</u>: Sei X ein Vektorfeld auf M, dass auf dem Hamilton-System (M, ω, H) als infinitesimale Symmetrie wirkt, d.h. X lässt $\{\,,\,\}$ und H invariant:

1) $L_X\{F, G\} = \{L_X F, G\} + \{F, L_X G\}$ für alle $F, G \in \mathcal{E}(M)$

2) $L_X H = 0$.

Dann gibt es zu jedem $a \in M$ eine offene Umgebung U von a und eine lokale Bewegungskonstante $I \in \mathcal{E}(U)$ mit $X|_U = X_I$.

<u>Bew.</u>: In kanonischen Koordinaten (q, p) hat X die Darstellung $X = X^j \frac{\partial}{\partial q^j} + X_j \frac{\partial}{\partial p_j}$. Setze $\alpha := -X_j\, dq^j + X^j dp_j$. Wegen 1° ist $d\alpha = 0$: $0 = L_X\{q^k, q^\ell\} = \{X^k, q^\ell\} + \{q^k, X^\ell\} = -\frac{\partial X^k}{\partial p_\ell} + \frac{\partial X^\ell}{\partial p_k}$, etc.

Nach dem Lemma von Poincaré existiert I mit $dI = \alpha$. Es ist $\frac{d}{dt} I(q,p) = -X_j \dot{q}^j + X^j \dot{p}_j = -X_j \frac{\partial H}{\partial p_j} - X^j \frac{\partial H}{\partial q^j} = -L_X H = 0$, also ist I Bewegungskonstante. Ebenso: $X_I = \frac{\partial I}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial q^k} - \frac{\partial I}{\partial q^k}\frac{\partial}{\partial p_k} = X^k \frac{\partial}{\partial q^k} + X_k \frac{\partial}{\partial p_k} = X|_U$. □

IV. Vollständig integrable Systeme

Sei (M, ω) symplektische Mf der Dimension $2n$.

Def.: (M, ω, H) heißt *integrables System* :<=>
Es gibt n Funktionen $F_j \in \mathcal{E}(M)$ mit

$1°$ $\{F_j, H\} = 0$, $j = 1, \dots n$. („F_j Bewegungskonstante")

$2°$ $\{F_j, F_k\} = 0$, $j, k = 1, \dots n$ („F_j in Involution")

$3°$ $dF_1 \wedge \dots \wedge dF_n = 0$. („$F_j$ unabhängig")

Die F_j heißen auch „*erste Integrale*".

Sei $F = (F_1, \dots F_n) : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Für jedes $c \in F(M)$ ist nach $3°$ dann die Niveaumenge $\Sigma_c := F^{-1}(c)$ eine n-dimensionale Untermf von M. Die Σ_c sind die Blätter der Distribution $E = \text{span}\{X_{F_1}, \dots X_{F_n}\} \subset TM$: Für $x \in \Sigma_c$
$T_x\Sigma_c = \text{span}\{X_{F_j}(x) : j = 1, \dots n\} \subset T_xM$.
Wegen $\omega(X_{F_j}, X_{F_k}) = \{F_j, F_k\} = 0$ gilt $\omega(X, Y) = 0$ für alle $X, Y \in T_x\Sigma_c$, Σ_c ist also eine n-dimensionale *Lagrange-Untermf*.
Wegen $1°$ lässt der Fluss $\varphi_t^{F_j}$ die Niveaufläche invariant, vgl. $3°$ a) im SATZ.

Das soll am Beispiel des harmonischen Oszillators (siehe Ende von Abschnitt III) demonstriert werden:

Die Teilenergien $E_j = \frac{1}{2}\left(p_j^2 + (q^j)^2\right)$ $(\not\mathcal{I})$ beim liefern solche Bewegungskonstanten in Involution: $\{E_j, H\} = 0$, $\{E_i, E_j\} = 0$ und $dE_j = p_j dp_j + q^j dq^j$ $\not\mathcal{I}$ erfüllen $dE_1 \wedge \ldots \wedge dE_n \neq 0$ auf

$$\Sigma_c = \left\{ (q,p) \in \mathbb{R}^{2n} \mid E_j(q,p) = c_j \text{ für } j = 1, \ldots n \right\},$$

wenn alle Komponenten c_j von c positiv sind.

Die Abbildung

$$E : \mathbb{R}^{2n} \setminus \Delta \to (\mathbb{R}_+)^n, \quad E = (E_1, \ldots E_n),$$

$\Delta = \{(p,q) \in \mathbb{R}^n : \text{alle } q^j \neq 0\}$, hat Maximalrang und ist eine surjektive Submersion. Für c, $c_j > 0$, ist mit $r_j = \sqrt{2c_j}$:

$$\Sigma_c = \left\{ (q,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid p_j^2 + (q^j)^2 = 4c_j^2 \right\} \cong \mathbb{S}^1_{r_1} \times \quad \times \mathbb{S}^1_{r_n}.$$

Also sind die Fasern Σ_c kompakte n-dimensionale Tori. Σ_c ist sogar gleich dem kartesischen Produkt der eingebetteten Kreislinien

$\mathbb{S}^1_{r_j} = \left\{ (q,p) \in \mathbb{R}^{2n} \mid p_j^2 + (q^j)^2 = 4c_j^2 = r_j^2,\ p_i = 0 = q^i \text{ für } i \neq j \right\}$.

Die Bewegungsgleichungen vereinfachen sich folgendermaßen:

$$p_j(t) = c_j \cos\theta_j(t) \quad , \quad q^j(t) = c_j \sin\theta_j(t) \qquad (\theta_j \text{ Winkelvariable})$$
$$\dot{p}_j(t) = -\dot{\theta}_j c_j \sin\theta_j(t) = -q_j(t) = -c_j \sin\theta_j(t)$$

Also: $\boxed{\dot{E}_j = 0 \ , \ \dot{\theta}_j = 1}$ $\boxed{E_j = c_j \, , \ \theta_j = \beta_j + \Omega_j t}$ $j = 1, 2, \ldots n$

<u>Satz von Arnold-Liouville:</u> Die zugehörigen Hamiltonschen Vektorfelder X_{F_j} seien vollständig (dann nennen wir (M, ω, H) mit den F_j ein vollständig integrables System). Dann gilt für jede Zusammenhangskomponente $\Sigma \subset \Sigma_c$:

$$\Sigma \cong (S^1)^k \times \mathbb{R}^{n-k} \qquad \text{für } k \in \{0, \dots n\}$$

Im Falle einer kompakten Niveaumenge Σ_c ist Σ also diffeomorph zu einem n-dimensionalen Torus $(S^1)^k$.

Beweisstrategie: Die Flüsse $\varphi_{t_j}^{F_j} : M \to M$ sind auf ganz M & $\mathbb{R}$ $(t_j \in \mathbb{R})$ definiert (vollständig) und sie kommutieren paarweise. Daher ist für $t = (t_1, \dots t_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi_t := \varphi_{t_1}^{F_1} \circ \dots \circ \varphi_{t_n}^{F_n} : M \to M$$ wohldefiniert, und liefert die Lie-Gruppen-Wirkung $\varphi : \mathbb{R}^n \times M \to M$.

Für $p \in \Sigma \subset \Sigma_c$ ist $\varphi_t(p) \in \Sigma \quad \forall t \in \mathbb{R}^n$, wegen der Invarianz. Es gilt: $\varphi_p : \mathbb{R}^n \to \Sigma$, $t \mapsto \varphi_t(p)$, ist surjektive Immersion und die Isotropiegruppe $\Gamma_p := \{ t \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_p(t) = \varphi_p(0) = p \}$ ist diskret.

Nach einem allgemeinen Satz sind die diskreten Untergruppen von $\mathbb{R}^n$ die k-dimensionalen Gitter, $0 \le k \le n$. Daher: $\Sigma \cong \mathbb{R}^n / \Gamma_p \cong (S^1)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.

Ergänzung von Jost: Ohne die Annahme der Vollständigkeit aber unter der Vss., dass eine Faser $\Sigma_c = F^{-1}(c)$ kompakt ist und zusammenhängend, kann gezeigt werden, dass Σ_c diffeomorph zu einem Torus ist.

Zur Erklärung des Begriffs „integrables System":
Außerdem gibt es eine offene Umgebung $U \subset M$ von Σ_c, die mit Wirkungs-Winkel-Variablen beschrieben (I, θ) werden kann:
$\theta = (\theta_1, \ldots \theta_n)$ sind die Winkelvariablen des Torus $\Sigma_c \cong (S^1)^n$ und die Bewegungsgleichungen in den neuen (kanonischen) Koordinaten (I, θ) sind

$$\boxed{\dot{I} = 0 \;, \quad \dot{\theta} = \Omega .}$$

mit den Bewegungen (Lösungen)

$$I = I(0) \;, \quad \theta = \theta(0) + \Omega t \;,$$

die durch einfache Integrationen („quadratfrei") ermittelt werden.

Zum Schluss die vollständig integrablen Systeme als integrable Systeme im Sinne eines Lax-Paares:

Wir betrachten die Lie-Algebra-Elemente H_i, E_i, $i = 1, \dots n$ mit den Relationen

$$[H_i, H_j] = 0 = [E_i, E_j] \quad , \; i,j = 1, \dots n \qquad (*)$$

$$[H_i, E_j] = 2\,\delta_{ij}\,E_i \quad , \quad \text{"}$$

Setze: $\displaystyle L := \sum_{j=1}^{n} I^j H_j + 2 I^j \theta_j E_j$

$$M := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial I^k} E_k$$

Dann gilt $\displaystyle [M, L] = \sum_{j,k} \frac{\partial H}{\partial I^k} I^j [E_k, H_j] + \frac{\partial H}{\partial I^k} 2 I^j \theta_j [E_k, E_j]$

$$= -2 \sum I^j \frac{\partial H}{\partial I^k} E_j \qquad \text{auf den Lösungen also}$$

$$= 2 \sum_{j=1}^{n} I^j \dot\theta_j E_j$$

Ferner

$$\dot L = \sum_{j=1}^{n} \dot I^j H_j + 2(\dot I_j \theta_j + I_j \dot\theta_j) E_j$$

$$= 2 \sum_{j=1}^{n} I^j \dot\theta_j E_j$$

Also

$$\dot L = [M, L] \iff \dot I = 0 \; , \; \dot\theta = \Omega$$

(*) Die H_j, E_j lassen sich durch $2n \times 2n$-Matrizen realisieren!

V. Symmetrie Hamiltonscher Systeme und Marsden-Weinstein-Reduktion

Im Folgenden sei (M, ω, H) ein Hamiltonsches System, d.h. M ist glatte Mft, ω ist symplektische Form und $H \in \mathcal{E}(M)$ eine Funktion.

Def: Eine Symmetrie der symplektischen Struktur ist durch eine Wirkung Φ einer Lie-Gruppe G auf M gegeben, die ω invariant lässt, d.h.

$$\Phi : G \times M \to M \qquad \text{diffbar und}$$
$$\Phi(h, \Phi(g, m)) = \Phi(hg, m) \quad \text{für alle } h, g \in G, \ m \in M$$
$$\Phi_g^* \omega = \omega \qquad \text{für alle } g \in G,$$

wobei $\Phi_g : M \to M$ durch $\Phi_g(a) = \Phi(g, a)$ gegeben ist.
Statt $\Phi_g(a)$ wird auch ga geschrieben.

Die Gruppe G wird auch symplektische Symmetriegruppe genannt, wenn die obige Situation vorliegt, oder man sagt, die Lie-Gruppe G wirke symplektisch auf (M, ω).

Ein spezieller Fall ist der einer 1-Parametergruppe $(\varphi_s)_{s \in \mathbb{R}}$ von kanonischen Transformationen

$$\varphi_s : M \to M \quad , \quad \varphi_s^* \omega = \omega ;$$

hier hat man die Symmetrie $\mathbb{R}\times M \to M$, $(s,a)\mapsto \varphi_s(a)$.
Ein anderer Fall ist der eines vollständig integrablen Systems. Dann hat man die Symmetrie

$$\varphi \quad \mathbb{R}^n \times M \to M,$$

die auch noch die Hamiltonfunktion invariant lässt:

$$H\,\varphi(t,a) = H(a) \qquad \text{für alle } (t,a)\in\mathbb{R}^n\times M.$$

Sei jetzt $\Phi : G\times M \to M$ eine symplektische Symmetrie, und sei $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\,G$ die zugehörige Lie-Algebra. Jedes $X\in\mathfrak{g}$ erzeugt eine 1-Parametergruppe (φ_s) auf G durch $\varphi_s(g) = e^{sX}g$ und damit auch eine 1-Parametergruppe von kanonischen Transformationen

$$a \longmapsto \Phi_{e^{sX}}(a) \quad , \; a\in M.$$

Sei $\tilde{X}\in TM$ der infinitesimale Erzeuger von $\left(\Phi_{e^{sX}}\right)_{s\in\mathbb{R}}$, also

$$\tilde{X}(a) = \frac{d}{dt}\left(\Phi_{e^{sX}}(a)\right)\Big|_{s=0}.$$

$\tilde{X}$ heißt das <u>Fundamentalfeld</u> zu X.

Am Ende von Abschnitt III (beim Beweis des Satzes von Noether) haben wir gesehen, dass

- $\tilde{X}$ ist infinitesimale Symmetrie, d.h.
  $$L_{\tilde{X}}\{F,G\} = \{L_{\tilde{X}}F, G\} + \{F, L_{\tilde{X}}G\}, \text{ und}$$

- $\tilde{X}$ ist lokal Hamiltonsch: Zu jedem Punkt $a \in M$ gibt es eine Umgebung U von a, $U \subset M$, und $I \in \mathcal{E}(U)$ mit $\tilde{X}|_U = X_I$

Def: Eine Momentenabbildung einer symplektischen Symmetriegruppe G auf (M,ω) ist eine diffbare Abbildung

$$m : M \to \mathfrak{g}^*$$

mit der folgenden Eigenschaft: Für die durch

$$I(a) := m(a)(X) \quad , a \in M, \ X \in \mathfrak{g}; \quad (I = I_X$$

gegebene Funktion gilt: $\tilde{X} = X_I$. Eine lokale Momentenabbildung ist entsprechend eine Momentenabbildung auf einer offenen, nichtleeren Teilmenge $U \subset M$.

Wir haben gerade gesehen, dass es zu $X \in \mathfrak{g}^*$ und $a \in M$ stets eine offene Umgebung U gewählt werden kann, auf der $I_X \in \mathcal{E}(U)$ mit $\tilde{X} = X_{I_X}$ existiert. Die Umgebung U kann gemeinsam für alle $X \in \mathfrak{g}^*$ gewählt werden. Damit kann

$$m(a)(X) := I_X(a) \qquad a \in U,\ X \in \mathfrak{g}^*$$

als lokale Momentenabbildung gewählt werden.(*)

<u>Def</u>: Eine <u>Symmetriegruppe</u> des <u>Hamilton-Systems</u> (M, ω, H) ist eine symplektische Symmetriegruppe G mit Wirkung Ψ, welche H invariant lässt, d.h. $H \circ \Psi_g = H$ für alle $g \in G$.

<u>Beispiel</u>: Im Falle eines vollständig integrablen Systems (M, ω, H) mit den ersten Integralen $F_1, \dots F_n$ ist $\mathbb{R}^n$ eine Symmetriegruppe des Hamiltonsystems (M, ω, H) und es ist d.h. $m := F : M \longrightarrow \mathbb{R}^n = \mathrm{Lie}(\mathbb{R}^n)^*$ eine globale Momentenabb. gegeben.

<u>SATZ VON NOETHER</u>: Sei G Symmetriegruppe des Hamilton-Systems (M, ω, H). Dann gilt:

(*) Die Momentenabbildung heißt <u>äquivariant</u> $:\Longleftrightarrow \forall g \in G: \ m(ga) = \mathrm{Ad}^*_g m(a)$
Hier ist $\mathrm{Ad}^*_g : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ die koadjungierte Wirkung von G.

1° Eine Momentenabbildung existiert immer lokal.

2° Ist $m : M \to \mathfrak{g}^*$ eine Momentenabbildung: dann ist m bewegungsinvariant; alle Komponenten von m sind Bewegungskonstante.

Das folgt aus den Erörterungen zur Existenz von m (siehe vorangehende Seite) und aus dem Satz von Noether am Ende von Abschnitt III (Seite 18).

Eine wichtige Methode zur Lösung der Bewegungsgleichungen eines klassischen mechanischen Systems ist die Reduktion der Freiheitsgrade mit Hilfe von Bewegungskonstanten. Im Rahmen der Momentenabbildung (also bei Symmetriegruppen G eines Hamiltonschen Systems) führt das zu Folgendem (Marsden-Weinstein-Reduktion). Sei $m : M \to \mathfrak{g}^*$ Momentenabbildung

Man betrachte $\Sigma_c := m^{-1}(c)$ für $c \in \mathfrak{g}^*$, $c \in m(M)$.
Σ_c ist invariant in Bezug auf X_H.
Sei Σ_c eine Untermannigfaltigkeit von M (z.B. wenn die Tangentialabb. $Tm : TM \to T\mathfrak{g}^*$ einen konstanten Rang $k \leq n$ hat.)

Man betrachte den Untervektorraum ($a \in \Sigma_c$)

$$E_a := \{ z \in T_a M \mid \omega(z, X) = 0 \;\; \forall X \in T_a \Sigma_c \} \subset T_a M.$$

Wenn Σ_c d-dim. Untermft ist, $d = 2n-k$, so ist E_a ein k-dim. Untervektorraum, unabhängig von $a \in \Sigma_c$. Dadurch wird ein Unterbündel $E \subset T\Sigma_c$ definiert, also eine Distribution. Diese ist involutiv (im Sinne von $X, Y \in E \Rightarrow [X, Y] \in E$) und deshalb nach dem Satz von Frobenius integrabel: Es gibt zu jedem $a \in \Sigma_c$ eine maximale k-dim. zusammenhdе Untermft N mit $a \in N$ und $T_b N = E_b$ für $b \in N$ („genannt „Blatt" durch a). Im Falle $d = 1$ sind das die Integralkurven γ zu einem Vektorfeld X, das E erzeugt: Also (lokal) $E_b = \mathbb{R} X(b)$ und $\dot\gamma = X(\gamma)$. Diese Blätterung definiert eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf Σ_c: $a \sim b \iff \exists$ zushd. Blatt N mit $a, b \in N$.

Der Quotient $\Sigma_c/\sim$ ist der Kandidat für ein um k Freiheitsgrade reduziertes Hamiltonsches System. Es gilt zu prüfen, ob der Quotient als Quotientenmft existiert (z.B. wenn man eine diffbare Struktur auf $\Sigma_c/\sim$ findet, so dass die kanonische Projektion

$$\pi : \Sigma_c \longrightarrow \Sigma_c/_{\sim} = M_0$$

eine Submersion ist.)(*) Dann ist M_0 zunächst eine Mannigfaltigkeit der Dimension $2n-2k$. Es gilt aber mehr: In diesem Fall überträgt sich die symplektische Struktur ω von M (bzw. Σ_c) auf M_0 vermöge

$$\omega_0 = \pi^* \omega|_{\Sigma_c} .$$

(M_0, ω_0) ist die Marsden-Weinstein-Reduktion (bezüglich $m : M \to \mathfrak{g}^*$ und $c \in m(M)$). Das ursprüngliche Problem ist um k Freiheitsgrade reduziert worden, (M_0, ω_0) ist ein $(2n-2k)$-dimensionaler Phasenraum, und die ganze Prozedur kann von vorne beginnen.

Der Fall des vollständig integrablen Systems (M, ω, H) mit den Integralen F_j, $j = 1, \dots n$, ist ein krasser Spezialfall: Die Momentenabb. $m = F = (F_1, \dots F_n)$ hat die n-dim. Mft Σ_c als Niveau-Mften ($c \in F(M) \subset \mathbb{R}^n$) und die oben genannte Distribution $E \subset T\Sigma_c$ erfüllt

---

(*) Spezielle Voraussetzungen für die Existenz der Quotientenstruktur als differenzierbare Mft bekommt man u.a. für äquivariante Momentenabbildungen m. In diesem Falle hat die Isotropiegruppe $G_c \subset G$ von $c = m(a) \in \mathfrak{g}^*$ bzgl. Ad^* eine Gruppenwirkung auf Σ_c und es ist $\Sigma_c/_{\sim} = \Sigma_c/G_c$. Die Sätze der Lie-Gruppen-Wirkung sind daher anwendbar.

aus Dimensionsgründen ($k=d=n$) : $E = T\Sigma_c$).
Daher ist $\Sigma_c/_{\sim}$ 0-dimensional und besteht aus nichts anderem als den Anfangswerten der Bewegungen.

Interessante Aspekte, die nicht behandelt wurden:

- Topologische Erörterungen, welche Mften M eine sympl. Struktur ω haben; welche VF X von der Form X_H sind etc.
- Topologisch-algebraische Bedingungen an G & M, wann es immer eine <u>globale</u> Momentenabbildung gibt.
- Äquivarianz der Momentenabbildung: $m: M \to \mathfrak{g}^*$, bezüglich der coadjungierten Wirkung von G auf $\mathfrak{g}^*$.
- Analyse von $m^{-1}(\sigma)$ für koadjungierte Orbits $\sigma \subset \mathfrak{g}^*$.
- Topologische Invarianten aus der symplektischen Geometrie: Gromov-Witten, Floer, ...

<u>Gute Bücher</u>:

Abraham/Marsden: Foundations of Mechanics (1978).
Arnold: Math. Methods of Classical Mechanics (1978).
Libermann/Marle: Symplectic Geometry and Analytic Mechanics (1987).
Hofer/Zehnder: Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics (1994)
Marsden et alii: Hamiltonian Reduction by Stages (2007). (Im Internet kostenlos erhältlich)