LMU
LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF.DR. M. SCHOTTENLOHER

Langlands-Korrespondenz IV im Wintersemester 2011/12

Planung des Programms

Im kommenden Wintersemester wollen wir uns vor allem mit der geometrischen Langlands-Korrespondenz und ihrer physikalischen Interpretation auseinandersetzen. Zum Ende des vergangenen Semesters haben wir uns in diesem Zusammenhang darauf geeinigt, den Modulraum $M_{\mathrm{H}}(X,G)$ der Higgsbündel (auf einer glatten, projektiven Varietät X zur reduktiven Lie-Gruppe G) und das zugehörige Hitchin-System zu studieren. Das bedeutet, dass wir

- zunächst die Definition und Konstruktion (Existenzbeweis) des Modulraums kennen lernen werden,
- dann die mannigfachen Eigenschaften von $M_{\mathrm{H}}(X,G)$ studieren werden, wie z.B. die Hyperkählerstruktur, die verallgemeinerten Thetafunktionen, die induzierte Struktur des vollständig integrablen Systems (Hitchin-Systems) sowie die spektrale Kurve, und
- schließlich die Relevanz für die Langlands-Korrespondenz darstellen wollen.

Daneben ist auch angedacht, den Beweis der Langlandskorrespondenz für den lokalen Fall im Falle der Gruppe G = GL(2) zu Ende zu führen (viele der Ingredienzien dazu haben wir in den letzten drei Semestern zusammengetragen), vgl. [BH].

Ganz vordergründig benötigt man für das genannte Vorhaben auf jeden Fall eine Reihe von mathematischen Theorien (oder Werkzeugen) aus verschiedenen Bereichen der Mathematik, meist aus der Algebraischen Geometrie.

Wir haben uns in den vergangenen Semestern vorbereitet und eine Reihe dieser Werkzeuge in Vorträgen dargestellt und damit bereitgestellt. Es sind das insbesondere:

- Teichmüllerraum und Modulraum (der punktierten Riemannschen Flächen, bzw. der glatten, punktierten algebraischen Kurven)
- D-Moduln auf Varietäten
- Derivierte Kategorien und Funktoren
- Stacks and Moduli Stacks
- Perverse Garben
- Riemann-Hilbert-Korrespondenz
- Topologische Feldtheorie

Alle diese Themen müssen möglicherweise vertieft werden. Sie passen aber ohne Zweifel ganz exzellent als Vorbereitung für das Thema „Modulraum der Higgsbündel“ in einem sehr allgemeinen Kontext.

Für die Festlegung auf Themen des kommenden Seminars (die dann jeweils doch sehr frei von jedem der Teilnehmer realisiert werden können) schlage ich im Folgenden eine (viel zu große) Reihe von Themen vor, die recht rudimentär mit Literaturhinweisen versehen werden. Dabei formuliere ich die Vorträge in der Regel für den komplex-analytischen Fall, so wie sie meistens für das geometrisch-physikalische Langlandsprogramm gebraucht werden, aber es ist den Vortragenden unbenommen, die Themen wesentliche algebraischer aufzufassen (Stichwort: Stacks und Motive). Viele der Themen können Ausgangspunkt von ganzen Vorlesungen sein, die Idee der Vorträge in diesem Seminar ist, dass jeweils ganz schnell der Bezug zur Langlandsvermutung hergestellt wird, dass daher in den meisten Fällen der Vortrag wieder nicht mehr ist als die Bereitstellung der Methoden und Resultate, mit denen die auftretenden Strukturen verstanden werden können.

Prozedur der Zuordnung der Vortragsthemen: Zu einer Festlegung, welche Vorträge schließlich vorgetragen werden, kommt es dadurch, dass sich die interessierten Teilnehmer bitte dazu melden, welche der untenstehenden Themen sie hören möchten und welche sie denn mit welcher Priorität als Vortrag halten möchten. Genauer: Jeder möge 4 Themen mit Priorisierung nennen und, wer einen Vortrag halten möchte, möge drei der Themen an mit Prioritätenreihenfolge angeben, wer zwei Vorträge hält, entsprechend zweimal je drei Vorträge. Diese Voten fasse ich durch gewichtete Addition zusammen zu einer Entscheidung, welche der Themen überhaupt gehalten werden sollten und wer sie jeweils hält. Ich bitte also um Rückmeldung bis ca. 26.9. mit der Erklärung, welche Themen ausgewählt wurden.

Die Themen:

1. Vektorbündel, insbesondere Einsteinbündel und der Satz von Uhlenbeck-Yau [Siu], [UY]
2. Die Kobayashi-Hitchin-Korrespondenz [LT], [Mo]
3. Hyperkählermannigfaltigkeiten und Kählermannigfaltigkeiten [H99, [H05], [Bat]
4. Vollständig integrable Systeme in der Physik und der Geometrie [Ar]
5. Supermannigfaltigkeiten und supersymmetrische Quantenfeldtheorien [Bat], [Wi82]
6. Familien holomorpher Strukturen und das zugehörige Modulproblem [HL], [Bra]
7. GIT – Geometrische Invariantentheorie [MFK]
8. Deligne-Mumford-Kompaktifizierung von $M_{g,n}$ [MFK]
9. Etale Kohomologie [Miln]
10. Modulräume holomorpher Vektorbündel [Bra]
11. Der Modulraum der Higgsbündel und seine Konstruktion [S]
12. Parabolische Higgsbündel [B], [DP], [Sch95]
13. Modulraum der Higgsbündel und Spektralkurve [XB], [Hi87], [Hi89], [S]
14. Mirror symmetry and Hitchin map [HT], [XH]
15. Homological Mirror Symmetry [KKS]
16. Explicit examples of moduli stacks
17. D-modules and its derived categories on stacks [BD]
18. Hitchin system and abelianization [DP], [XP]
19. Überblick: Wittens Version der physikalischen Langlands-Korrespondenz [Wi08], [XK]
20. Langlands correspondence and topological field theory [K95], [K10], [XK]
21. TFT, higher category theory and geometric Langlands [K10], [KW], [GW08]
22. Verallgemeinerte komplexe Strukturen [Mill]
23. Die Formulierung der Langlandsvermutung nach Beilinson-Drinfeld [BD], [F09], [XP]
24. Nonabelian Hodge theory [XP], [S]

Literatur:

[Ar] Arnold: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*

[Bat] M. Batchelor: The structure of supermanifolds. Trans. Amer. Math. Soc. 253 (1979), 329

[Ba] H. Baum: *Eichtheorie*

[BK] Bakalov, Kirillov: *Lectures on tensor categories and modular functors*

[BD] A. Beilinson and V. Drinfeld: Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigensheaves, available at http://www.math.uchicago.edu/~mitya/langlands/hitchin/BD-hitchin.pdf

[Bo] Borel et al.: *Algebraic D-Modules*

[Bra] Bradlow: *Moduli and vector bundles.* 2009

[Bru] Bruzzo: *Geometry and Physics of Branes*

[BH] Bushnell and Henniart: *Local Langlands for GL(2).* Springer (2006)

[DP] R. Donagi and T. Pantev: Langlands Duality For Hitchin Systems, Preprint arXiv:math.AG/0604617.

[F03] E. Frenkel: Recent Advances in the Langlands Program. BAMS (2003)

[F05] E. Frenkel: Lectures on the Langlands Program and Conformal Field Theory (2005)

[F07] E. Frenkel: *Langlands correspondence for loop groups* (2007)

[F09] E. Frenkel: Gauge theory and Langlands duality, Sém. Bourbaki, 2009.

[Ga] Garcia-Prada: Moduli Spaces of Geometric Structures (als Anhang in Wells: '*Differentiable Analysis on Complex Manifolds*', neue Auflage von 2008)

[GW06] S. Gukov and E. Witten: Gauge Theory, Ramification, And The Geometric Langlands Program, in Current developments in mathematics, 2006, pp. 35–180, Int. Press, 2008, arXiv:hep-th/0612073.

[GW08] S. Gukov and E. Witten: Rigid Surface Operators, Preprint arXiv:0804.1561.

[Hi87] N. Hitchin: The Self-Duality Equations On A Riemann Surface, Proc. London Math. Soc. (3) 55 (1987) 59–126.

[Hi89] N. Hitchin: Stable Bundles And Integrable Systems, Duke Math. J. 54 (1987) 91–114. 1010–31

[Hi07] N. Hitchin: Langlands Duality and G2 Spectral Curves, Quat. J. Math. 58 (2007) 319–344.

[Ho] Hori: *Mirror Symmetry*

[HT03] T. HAUSEL and M. Thaddeus: Mirror Symmetry, Langlands Duality, And the Hitchin System, Invent. Math. 153 (2003) 197–229.

[HTT] Hotta, Takeuchi, Tanisaki: *D-Modules, Perverse Sheaves, and Representation Theory*

[H99] D. Huybrechts: Compact hyperkähler manifolds: basic results. Invent. math. 135, 63-113 (1999)

[H05] D. Huybrechts: *Complex Geometry.* 2005

[HL] Huybrechts, Lehn: *The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves*

[K08] A. Kapustin: A Note on Quantum Geometric Langlands Duality, Gauge Theory, and Quantization of the Moduli Space of Flat Connections, Preprint arXiv:0811.3264.

[K95] Kapranov: Analogies between the Langlands correspondence and topological quantum field theory. In: Functional Analysis on the Eve of the 21st century, Birkhäuser 1995.

[K10] A. Kapustin: Topological Field Theory, Higher Categories, and Their Applications. Proc. Int. Congress in Maths, 2010

[KKS] Kapustin, Kreuzer, Schlesinger: *Homological mirror symmetry: new developments and perspectives.* 2009

[KW] A. Kapustin: and E.Witten: Electric-magnetic Duality And The Geometric Langlands Program, Communications in Number Theory and Physics 1 (2007) 1-236, arXiv:hep-th/0604151.

[KS] Kashiwara, Shapiro: *Sheaves on Manifolds*

[La2] Laumon: *Traveaux de Frenkel* .... Sém. Bourbaki 2001/02

[LMB] Laumon, Moret-Bailly: *Champs Algébriques*

[LN] Laumon, Ngho: Le lemme fundamental pour le group unitaire, Ann. Math.

[LT] Lübke and Telemann: *The Kobayashi-Hitchin correspondence.* (1995)

[Mill] Miller et al.: Generalized Complex Structure;

[Miln] Milne: *Étale Cohomologie*

[Mo] Takuro Mochizuki: Kobayashi-Hitchin correspondence for ... I, II

[MFK] Mumford, Fogarty, Kirwan: *Geometric Invariant Theory.* 3. Auflage, 1994.
[Sch] Scheinost and Schottenloher: Metaplectic quantization of the moduli spaces of flat and parabolic bundles. J. reine angew. Math. (1995),
[Sim] Simpson: Higgs bundles and local systems. Publ. Math. 1992.
[Siu] Siu: *Lectures on Hermitian-Einstein metrics for stable bundles and Kähler-Einstein metrics.* DMV (1987)
[Tu] Turaev: *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*
[UY] K. Uhlenbeck, S.T. Yau: On the existence of hermitian-yang-mills connections in stable vector bundles. Comm. Pure Appl. Maths 39 (1986), 257 - 293
[VY] Vafa, Yau: Winter school on mirror symmetry, vector bundles, and Lagrangian submanifolds
[We] Weinstein: *Lectures on Symplectic Manifolds;*
[Wi82] E. Witten: Supersymmetry and Morse theory. J. Diff Geom. 17 (1982), 661- 692.
[Wi88] E. Witten: Topological quantum field theory, Comm. Math. Phys. 117 (1988) 353–386.
[Wi92] E. Witten: Mirror manifolds and topological field theory, in Essays on Mirror manifolds, Ed. S.-T. Yau, pp. 120–158, International Press, 1992.
[Wi08] E. Witten: Mirror Symmetry, Hitchin's Equations, And Langlands Duality, Preprint arXiv:0802.0999.
[X] Second International School on Geometry and Physics, Geometric Langlands and Gauge Theory. Bellaterra 2010:
[XD] David Ben-Zvi: Gauge theory and representation theory
[XB] Olivier Biquard: An introduction to Higgs bundles
[XH] Tamás Hausel: Mirror symmetry, Langlands duality and the Hitchin system
[XK] Anton Kapustin: Langlands duality and topological field theory
[XP] Tony Pantev: Lectures on the geometric Langlands conjecture and non-abelian Hodge theory.

Zurück zu unserem Programm. Der Modulraum der Higgsbündel und das Hitchin-System in Verbindung mit der geometrischen Langlandsvermutung werden in den 5 Artikeln der Schule [X] gut behandelt, insofern könnten wir uns auch ganz auf diese 5 Artikel konzentrieren. Diese 5 Artikel passen daher auch zu fast allen der 24 Themen, die ich zur Auswahl gestellt habe, ohne dass sie dort immer genannt werden. Ähnliches gilt für die Artikel von Frenkel, in denen gute Übersichten zu dem ganzen Themenkomplex zu finden sind, und die wir ja schon die ganze Zeit zu Rate gezogen haben.

Die angegebene Literatur ist nicht homogen, manchmal ist die Literaturangabe der wesentliche Artikel, in dem vor allem der Beweis bereitgestellt wird, wie z.B. [UY], oder es handelt sich um eine umfassende Abhandlung, wie z.B. [MFK], oder ein Lehrbuch, wie [Hu05] und recht oft geht es um Übersichtsartikel wie in [X] oder [Wi08].

Manche der Literaturstellen aus der Literaturliste werden in der Themenliste nicht genannt, aber sie sind doch im Hintergrund und als Ergänzung von Bedeutung.

Wenn es die Zeit nicht zulässt, dass Sie sich entscheiden können, so müssen wir die Festlegungen zum Programm verschieben auf die Zeit um den 11.10.11. Das Seminar fällt am ersten Dienstag, d. 18.9. vermutlich aus (ich bin nicht in München), und beginnt erst richtig am 25.9.!