Lokale Systeme - Kurzvortrag

Pascal Reisert

June 2, 2010

Abstract

Lokale Systeme sind ein wesentlicher Bestandteil der geometrischen Langlands Korrespondenz. Sie nehmen in der geometrischen Formulierung den Platz der Galoisgruppe ein und können auch für Darstellungen in einer beliebigen reduktiven Gruppe definiert werden. Im folgenden wollen wir grob den Weg von der Galoisgruppe zu Lokalen Systemen skizzieren und dabei auch die geometrischen Kategorien auf dieser Seite der Langlands Korrespondenz einführen.

1 Von der Galoisgruppe zur Fundamentalgruppe

Ohne weitere Erwähnung werden wir den folgenden Satz an verschiedenen Stellen verwenden, insbesondere gerade die Kategorie verwenden, die am sinnvollsten erscheint - zumeist werden dies im geometrischen Kontext die kompakten Riemannschen Flächen sein.

Satz 1.1. Die folgenden Kategorien sind äquivalent:

(i) Endliche Erweiterungen von $\mathbb{C}(X)$ (Menge der rationalen Funktionen von X nach $\mathbb{C}$.)

(ii) Glatte projektive komplexe algebraische Kurven.

(iii) Kompakte zusammenhängende Riemannsche Flächen mit einer holomorphen Abbildung auf X.

Die klassische Langlands Korrespondenz kann wie folgt dargestellt werden für $F = \mathbb{C}(X)$[1]

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Irreduzible Darstellungen}\\ \text{von } \mathrm{Gal}(\overline{F}|F)\end{array}} \longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Irreduzible kuspidiale automorphe}\\ \text{Darstellungen von } \mathrm{Gl}_n(\mathbb{A}_F)\end{array}}$$

[1] cf. [1]

In Analogie dazu lautet die geometrische Langlands Korrespondenz[1]

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Irreduzible Lokale Systeme}\\ \text{vom Rang } n \text{ auf } X\end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Hecke Eigengarben auf}\\ \mathrm{Bun}_n\end{array}}$$

Während man den Übergang auf der rechten Seite in [1], S. 33ff findet wollen wir uns kurz mit dem Übergang auf der linken Seite beschäftigen. Seien X und Y Riemannsche Flächen und $\mathcal{M}(X)$ bzw. $\mathcal{M}(Y)$ jeweils die meromorphen Funktionen darauf. Aus der Topologie wissen wir, dass für eine Überlagerung $\pi : Y \to X$ die Gruppe der Automorphismen (Decktransformationen) φ von Y, die X invariant lassen - $\pi \circ \varphi = \pi$ - eine Untergruppe H von $\pi_1(X)$ ist. Entsprechend ist $\mathcal{M}(Y)$ eine Galoiserweiterung von $\mathcal{M}(X)$ mit Galoisgruppe H'. Man erkennt eine gewisse Analogie zwischen den Definitionen von H und H'.
Die Menge der topologischen Überdeckungen ist leider zu klein um alle Galoiserweiterungen mit obiger Konstruktion zu erfassen; sie beschreibt nur unverzweigte Erweiterungen. Für verzweigte Erweiterungen erinnere man sich an den klassischen Begriff einer Verzweigung in der komplexen Analysis:

Lemma 1.2. Sei $\pi : Y \to X$ eine holomorphe Abbildung Riemannscher Flächen und $y \in Y$ mit $x = \pi(y) \in X$. Dann gibt es offene Umgebungen $V_y \ni y$ und $U_x \ni x$ mit $\pi(V_y) \subset U_x$, sowie Karten $\varphi_y : V_y \to \mathbb{C}, \phi_x : U_x \to C$ mit $\phi_x(x) = \varphi_y(y) = 0$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V_y \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi_y"'] & U_x \arrow[d, "\phi_x"] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "z \mapsto z^{e_y}"'] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

für eine eindeutige ganze Zahl e_y (unabhängig von den gewählten Karten) kommutiert.

Beweis. Ein Beweis findet sich zum Beispiel in [4], Seite 76f. □

Sei $S_\pi = \{y \in Y | e_y > 1\}$ die Menge der Verzweigungspunkte, dann ist S_π eine diskrete abgeschlossene Teilmenge von Y. Eine Abbildung heißt eigentlich, wenn das Urbild jeder kompakten Menge kompakt ist. Insbesondere ist jede stetige Abbildung zwischen lokal kompakten Hausdorffräumen eigentlich, also auch jede stetigen Abbildung zwischen kompakten Riemannschen Flächen. Da für uns nur solche von Interesse sind werden wir diese Einschränkung auf eigentliche Abbildungen im folgenden nicht mehr erwähnen. Eine Betrachtung des nicht kompakten Falls findet sich in [4], Seite 76ff.

Mit dem vorausgegangenen Lemma lässt sich nun folgende Äquivalenz beweisen:

Satz 1.3. (1) Seien X, Y zusammenhängende Riemannsche Flächen, $\pi : Y \to X$ eine holomorphe Abbildung, dann ist π surjektiv und die Einschränkung $\tilde{\pi} = \pi|_{Y \setminus \pi^{-1}(\pi(S_\pi))} : Y \setminus \pi^{-1}(\pi(S_\pi)) \to X \setminus \pi(S_\pi)$ ist eine topologische Überlagerung. Existiert eine solche Einschränkung zu einer Überlagerung, so heißt $\pi : Y \to X$ verzweigte Überlagerung.

(2) Sei $\mathrm{Hol}_{X,S}$ die Kategorie der Riemannschen Flächen Y für die eine holomorphe Abbildung $\pi : Y \to X$ existiert, so dass alle Verzweigungspunkte von π über einer diskreten abgeschlossenen Menge S liegen. Dann ist $\mathrm{Hol}_{X,S}$ äquivalent zur Kategorie der endlichen topologischen Überlagerungen von $X \setminus S$.

(3) Die Automorphismengruppe von $\pi : Y \to X$ als Objekt von $\mathrm{Hol}_{X,S}$ ist gleich der Automorphismengruppe von $Y \setminus \pi^{-1}(S) \to X \setminus S$.

Ohne auf die Details des Beweises näher einzugehen[2], erkennt man doch, dass uns 1.1 und 1.3 eine Erklärung liefern warum wir endliche Galoiserweiterungen von $\mathbb{C}(t)$ mit i.A. verzweigten Überlagerungen in Verbindung setzen können. Entsprechend hängen auch die Galoisrgruppe und die Fundamentalgruppe zusammen.

Lemma 1.4. (1) Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $X' = X \setminus S$, S diskret. Sei weiter $K_{X'}$ die Körpererweiterung von $\mathcal{M}(X)$ zur maximalen verzweigten Überlagerung $\pi : Y \to X$ bzgl. Verzweigungsmenge $\pi^{-1}(S)$, Y kompakte Riemannsche Fläche. Dann ist die Erweiterung $K_{X'}|\mathcal{M}(X)$ galoissch und die Galoisgruppe ist isomorph zur profiniten Vervollständigung von $\pi_1(X', x), x \in X'$ beliebig.

(2) $\mathrm{Gal}(\overline{\mathcal{M}(X)}|\mathcal{M}(X))$ ist der inverse Limes der Gruppen $\mathrm{Gal}(K_{X'}|\mathcal{M}(X)) \simeq \widehat{\pi_1(X')}$ bzgl. $K_{X'} \supset K_{X''}$ (aus $X' \subset X''$).

Beweis. [4], Seite 85ff. □

Bezieht sich die klassischen Langlands Programm auf Darstellungen der Galoisgruppe, so bleibt nun die Hoffnung eine ähnliche Korrespondenz für Darstellungen der Fundamentalgruppe zu finden. Die Fundamentalgruppe ist immer noch ein Gruppe - ein algebraisches Objekt - und damit nicht gerade geometrisch. Allerdings lassen sich ihre Darstellungen mit geometrischen Objekten, wie lokalen Systemen, in Verbindung bringen.

[2] Einen Beweis findet man wiederum in [4], Seite 77ff.

2 Lokale Systeme

Definition 2.1. Ein lokales System ist eine lokal konstante Garbe auf M.

Definition 2.2 (Vektorbündel)**.** Sei M eine Mannigfaltigkeit, E der Totalraum (eine Mannigfaltigkeit) und $\pi : E \to M$ eine glatte Surjektion. (E, M, π) heißt ein glattes Vektorbündel, wenn gilt

1° $\pi^{-1}(x)$ ist ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}-$Vektorraum ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$).

2° $\exists k \in \mathbb{N}$, $\exists (U_j)$ offene Überdeckung mit lokalen Trivialisierungen

$$\varphi_j : E_{U_j} := \pi^{-1}(U_j) \to U_j \times \mathbb{K}^k \quad \text{diffeomorph,}$$

welche $\pi|_{E_{U_j}} = \mathrm{pr}_1 \circ \varphi_j$ erfüllen und $\varphi_a = \varphi_j|_{E_a} : E_a \to \{a\} \times \mathbb{K}^k$ ist ein Isomorphismus.

Definition 2.3 ($G-$Bündel)**.** Sei M eine Mannigfaltigkeit, G eine Lie-Gruppe (die Strukturgruppe), P der Totalraum (eine Mannigfaltigkeit) und $\pi : P \to M$ eine glatte Abbildung. Wir erhalten ein $G-$Prinzipalbündel[3] wenn es eine glatte Rechtswirkung $P \times G \xrightarrow{\Psi} P$ mit $(p, g) \to pg = \Psi(p, g), (pg)h = p(gh), pe = p$ gibt, so dass gilt

1° $\pi(pg) = \pi(p), \forall (p, g) \in P \times G$ und die Abbildung $G \to P_a = \pi^{-1}(a), g \mapsto pg$ ist ein Diffeomorphismus für alle $p \in P$ mit $\pi(p) = a$.[4]

2° $\exists (U_j)$ offene Überdeckung mit lokalen Trivialisierungen

$$\varphi_j : P_{U_j} := \pi^{-1}(U_j) \to U_j \times G \quad \text{diffeomorph,}$$

welche $\pi|_{P_{U_j}} = \mathrm{pr}_1 \circ \varphi_j$ und $\varphi_j(pg) = \varphi_j(p)g$ für $g \in G, p \in P_{U_j}$ erfüllen.

Die über

$$\begin{aligned} \varphi_j \varphi_k^{-1} \quad : \quad & U_{jk} \times H \to U_{jk} \times H, \quad U_{jk} = U_j \cap U_k \\ & (a, h) \mapsto (a, g_{jk}(a)h) \end{aligned}$$

definierten Abbildungen $g_{jk} \in \mathcal{E}(U_{jk}, H)$ heißen Übergangsfunktionen.[5]

Notation 2.4. - $\mathcal{E}(X)$ ist die Menge der glatten Abbildungen von X nach $\mathbb{C}$; $\mathcal{E}(X, Y) = \{f : X \to Y | f \text{ glatt}\}$.

[3] Wir werden im folgenden gelegentlich nur $G-$Bündel schreiben, aber ein $G-$Prinzipalbündel meinen.

[4] frei

[5] $H = G$ für ein $G-$Bündel und $H = \mathrm{Gl}_k(\mathbb{K})$ für ein Vektorbündel.

- $\Lambda^p_M = \bigcup_{a\in M} \Lambda^p_a M$ mit $\Lambda^p_a = \{\alpha : T_aM^p \to \mathbb{K} | \alpha\ p-\text{linear über } \mathbb{K} \text{ und alternierend}\}$. Insbesondere $\Lambda^1 M = T^*M$ - das Kotangentialbündel. Weiter sei $\tau : \Lambda^p_M \to M$ die Projektion.
- $\Omega^p(P,\mathfrak{g}) = \{\alpha \in \mathcal{E}(P,\Lambda^p P) | \tau\circ\alpha = \mathrm{id}_M\}$ und $\mathfrak{g}$ Lie-Algebra zur Lie-Gruppe G.
- $\mathfrak{W}(M)$ ist die Menge der Vektorfelder auf M, d.h. $X \in \mathfrak{W}(M) \Leftrightarrow X : M \to TM$ glatt, $\pi \circ X = \mathrm{id}_M, \pi : TM \to M$.
- $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ ist die Menge der $\mathbb{K}-$Endomorphismen $E \to E$.
- $\Gamma(U,E)$ ist der $\mathbb{K}-$Vektorraum (auch $\mathcal{E}(M)-$Modul) der Schnitte $s : U \to E$. ($\pi \circ s = \mathrm{id}_U$, $U \subset M$).

Definition 2.5 (Zshg. Vektorbündel)**.** Eine Zusammenhangsform auf einem Vektorbündel (E,M,π) ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \nabla \ :\ & \mathfrak{W}(U) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Gamma(U,E)) \\ & \xi \mapsto \nabla_\xi \end{aligned}$$

mit

(I) $\nabla_{f\xi+\eta} = f\nabla_\xi + \nabla_\eta\ \forall f \in \mathcal{E}(U)$, $\xi,\eta \in \mathfrak{W}(U)$.

(II) $\nabla_\xi(fs) = s\xi(f) + f\nabla_\xi s$ (Leibnizregel).

Eine Zusammenhangsform heißt flach, falls $[\nabla_\xi,\nabla_\eta] = \nabla_{[\xi,\eta]}$.

Definition 2.6 (Zshg. $G-$Bündel)**.** Eine Zusammenhangsform auf einem $G-$Bündel ist eine $1-$Form $\alpha \in \Omega^1(P,\mathfrak{g}) = \Omega^1(P)\otimes\mathfrak{g} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}(P)}(\mathfrak{W}(P),\mathcal{E}(P,\mathfrak{g}))$ mit

[I1] $\alpha(\tilde{X}) = X$ für alle $X \in \mathfrak{g}$.[6]

[I2] $\Psi_g^*\alpha = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\alpha$ für alle $g \in G$.[7]

Eine Zusammenhangsform heißt flach, wenn die Krümmung

$$\Omega = d\alpha + \alpha\wedge\alpha \in \Omega^2(P,\mathfrak{g})$$

verschwindet.

[6] $\tilde{X}(p) = \frac{d}{dt} p\exp(tX)\big|_{t=0} = [p\exp(tX)]_p \in T_pP$ - $\tilde{X} \in \mathfrak{W}(P)$.

[7] $\Psi_g : P \to P, p \mapsto pg$ der durch die Rechtswirkung induzierte Diffeomorphismus und Ψ_g^* der Rückzug von Ψ_g, d.h. $(\Psi_g^*\alpha)_p(X) = \alpha_{\Psi_g(p)}((T\Psi_g)(X))$ für $X \in T_pP, T\Psi_g : TP \to TP, v \mapsto T_a\Psi_g(v)$ und $T_a\Psi_g : T_aP \to T_{\Psi_g(a)}P, T_a\Psi_g([x]_a) = [\Psi_g \circ x]_{\Psi_g(a)}, v \in \sigma^{-1}(a)$ für $a \in P$ und $\sigma : TP \to P, \xi \in T_aP \mapsto a$.

Nach dieser ausführlichen Begriffsklärung können wir nun Darstellungen der Fundamentalgruppe mit Vektorbündeln bzw. $G-$Prinzipalbündeln und lokalen Systemen in Zusammenhang bringen.

Satz 2.7. Es existieren Bijektionen zwischen den (Eich-)Äquivalenzklassen von Vektorbündeln/$G-$Prinzipalbündeln, den Äquivalenzklassen von Darstellungen von $\pi_1(M)$ und den Isomorphieklassen lokaler Systeme. Im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Lokale Systeme}} \arrow[rr, leftrightarrow, "\simeq"] \arrow[dr, leftrightarrow, "\simeq"] & & \boxed{\text{flache Vektorbündel/ } G\text{-Bündel}} \arrow[dl, leftrightarrow, "\simeq"] \\
& \boxed{\text{Darstellungen von } \pi_1(M)} &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Später! □

Bemerkung 2.8. Für Darstellungen $\pi_1(M) \to \mathrm{Gl}_k(\mathbb{C})$ sind die lokalen Systeme lokal konstante Garben mit Werten in $k-$dimensionalen Vektorräumen. Für Darstellungen in einer reduktiven Lie-Gruppe G sind die lokalen Systeme Garben mit Werten in $G-$Torsoren bzw. genauer L^G-Torsoren, wobei L^G die Langlands-duale Gruppe ist.

Literature

[1] Edward Frenkel, *Lectures on the Langlands Program and Conformal Field Theory*, arXiv:hep-th/0512172v1 (2005).

[2] Helga Baum, *Eichfeldtheorie*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2009.

[3] Martin Schottenloher, *Skript zur Vorlesung Geometrische Quantisierung*, LMU, Geometric Quantization, WS 2009/2010.

[4] Tamás Szamuely, *Galois Groups and Fundamental Groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 117, Cambridge University Press, 2009.