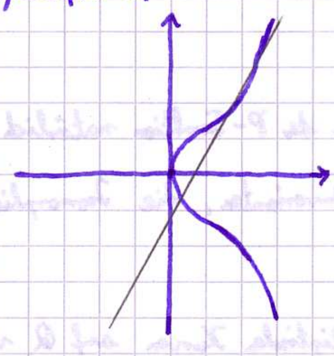
Elliptische Kurven / Funktionen

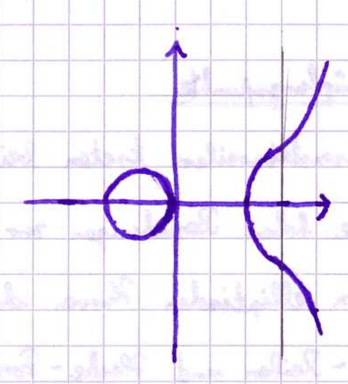
Sei K ein Körper.

Was ist eine ell. Kurve?

- Eine nichtleere, ebene und glatte algebraische Kurve vom Grad 3. Im Fall $\operatorname{char} K \neq 2,3$ existieren (bis auf affine Variablentrafo) immer $a, b \in K$ mit Diskriminante $\Delta = 4a^3 + 27b^2 \neq 0$, so dass $E := E(K) := \{(x,y) \in K^2 ;\ y^2 = x^3 + ax + b\} \cup \{\infty\} \subset \mathbb{A}^2(K) \cup \{\infty\}$.
  Die Schreibweise $E(K)$ stellt heraus, dass man nur Lösungen in K betrachtet, und nicht weitere aus Erweiterungskörpern.
- Eigentlich wird die proj. Ebene betrachtet, und obige Schreibweise ist nur zur Vereinfachung der Notation eingeführt. „In Wirklichkeit" gilt:
  $$E = \{(x:y:z) \in \mathbb{P}^2(K) ;\ y^2 z = x^3 + axz^2 + bz^3\} \subset \mathbb{P}^2(K)$$
  Hieraus wird auch ersichtlich, dass obiges „∞" dem Pkt. $(0:1:0)$ entspr.
- Beispiele f. $K = \mathbb{R}$.



$Y^2 = X^3 + X$



$Y^2 = X^3 - 4X$

- Die Menge E trägt eine Gruppenstruktur, bezeichnet mit $\oplus$.
  - Neutrales Element ist ∞.
  - $A \oplus B \oplus C = \infty$ für alle Punkte $A, B, C \in E$, die auf einer Geraden liegen (Vielfachheiten sind miteinzurechnen)
  - Konsistenz und Assoziativität sind nicht offensichtlich, Kommutativität hingegen schon. Inversenbildung ist Reflektion an d. X-Achse.

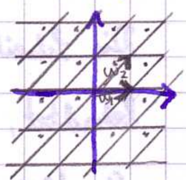
- Isomorphietypen von E bei üblichen Körpern:

K	$\mathbb{F}_q$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
$E(K) \cong$	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}$	endlich erzeugt	$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{C}/\Lambda$ für ein Gitter Λ

Ein solches Gitter hat die Form $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ für zwei $\mathbb{R}$-linear unabh. ω_i.

Was ist eine elliptische Funktion?

- Eine Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt elliptisch, wenn sie meromorph ist und es ein Gitter Λ gibt mit



$$f(z+\omega) = f(z) \quad \forall z \in \mathbb{C},\ \omega \in \Lambda$$

- Nach dem Satz von Liouville ist jede holomorphe elliptische Funktion konstant; d.h. interessante ell. Fkt. besitzen Pole.
- Es gibt solche, z.B. die (zu einem Gitter Λ gehörende) Weierstraß'sche $\wp$-Funktion $\wp = \wp_\Lambda$.
- Es gilt, dass jede ell. Funktion zum Gitter Λ in $\mathbb{C}(\wp_\Lambda) + \mathbb{C}(\wp_\Lambda)\wp_\Lambda'$ ist.

Anknüpfungspunkte

- Eisensteinreihen treten bei Betrachtung der $\wp$-Funktion natürlich auf. Sie haben Beziehungen zur sog. j-Invarianten, die Isomorphie von elliptischen Kurven charakterisiert.
- L-Reihen und Hecke-Formen von elliptischen Kurven auf $\mathbb{Q}$ waren zentral im Beweis des großen Satzes von Fermat durch Andrew Wiles.

Literatur: (weitere: siehe Seminarprogramm)

- Silverman: The Arithmetic of Elliptic Curves
  (Einführung über die algebraische Geometrie, abstrakte Herangehensweise)
- Freitag, Busam: Funktionentheorie
  (Hinarbeiten auf Verwendung von ell. Modulformen in der analyt. Zth.)
- Hellegouarch: Invitation to the Mathematics of Fermat-Wiles