DIRICHLET-L-REIHEN UND SATZ VON DIRICHLET ÜBER PRIMZAHLEN IN ARITHMETISCHEN PROGRESSIONEN

MARIN GENOV

Zusammenfassung. Die nachfolgende Ausarbeitung hat sich zum Ziel gesetzt, einen möglichst kurzen, zugleich aber mit minimalen Anforderungen an Vorwissen, Beweis des wohlberühmten Satzes von Dirichlet über Primzahlen in arithmetischen Progressionen zu geben. Als zweiter Leitfaden versucht der Text, entlang der Beweisführung auch einige elementare Eigenschaften und Methoden aus der Theorie der Dirichlet-L-Reihen in Vordergrund zu bringen.

Für komplexe Zahlen $s \in \mathbb{C}$ benutzen wir die Standardnotation $s = \sigma + it$. Außerdem bezeichnen wir $G_m := U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ (reduziertes System des Restklassen $\pmod m$) und $\mu_n := \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Mit $p \in \mathbb{N}$ meinen wir stets Primzahl.

1. Dirichlet-Charaktere und Dirichlet-L-Reihen

Definition 1. *Ein Dirichlet-Charakter* $\pmod m$ *ist ein Charakter* $\chi : G_m \to \mathbb{S}^1$.

Ein Dirichlet-Charakter χ induziert auf natürliche Art und Weise seine eigene Fortsetzung auf $\mathbb{Z}$ durch

$$\chi(n) := \begin{cases} \chi(\bar{n}) \text{ in } G_m \text{ (“abuse of notation”), falls } (n,m) = 1 \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Definition 2. $\hat{G_m} := \{\chi$ *Dirichlet-Charakter auf* $G_m\}$ *heißt Dualgruppe von* G_m. *Der Dirichlet-Charakter* $\chi_0 \in \hat{G_m}$ *mit*

$$\chi_0(n) := \begin{cases} 1, \textit{ falls } (n,m) = 1 \\ 0, \textit{ sonst} \end{cases}$$

heißt Hauptcharakter oder trivialer Charakter $\pmod m$ *(Indikatorfunktion der ganzen Zahlen paarweise prim mit m).*

Theorem 1. *(Eigenschaften von Dirichlet-Charakteren) Es gilt:*

(1) $\chi \in \hat{G_m} \Rightarrow \chi$ *is vollständig multiplikativ und periodisch mit Periode m;*
(2) *Orthogonalität in G_m:*

$$\sum_{a \in G_m} \chi(a) = \begin{cases} \varphi(m), \textit{ falls } \chi = \chi_0 \\ 0, \textit{ sonst;} \end{cases}$$

(3) *Orthogonalität in $\hat{G_m}$:*

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : \sum_{\chi \in \hat{G_m}} \bar{\chi}(a)\chi(b) = \begin{cases} \varphi(m), \textit{ falls } a \equiv b \pmod m \\ 0, \textit{ sonst;} \end{cases}$$

(4) *Eindeutigkeit: Ist χ eine vollständig multiplikative arithmetische Funktion mit Periode $m \in \mathbb{N}$ und $\chi(n) = 0 \Leftrightarrow (n, m) \neq 1$, dann ist $\chi \in \hat{G_m}$;*
(5) *Sei $(n, m) = 1$ und sei $\omega \in \mu_{ord(\bar{n})}$. Dann:*

$$|\{\chi \in \hat{G_m} : \chi(n) = \omega\}| = [G_m : (\bar{n})]$$

Definition 3. *Sei $\chi \in \hat{G_m}$. Dann heißt die Dirichlet-Reihe*

$$D_\chi(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s} =: L(s, \chi) \equiv L(\chi, s)$$

Dirichlet-L-Reihe zu χ. Falls vorhanden, heißt ihre analytische Fortsetzung Dirichlet-L-Funktion zu χ.

2. Allgemeine Vorbereitungen

Lemma 1. *(Landau) Sei $F(z) = \sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ Dirichlet-Reihe mit $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, und sei $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ fest. Angenommen, dass F für alle $\Re(z) > \sigma_0$ als Dirichlet-Reihe konvergiert, und dass F holomorphe Fortsetzung in einer Umgebung von $z = \sigma_0$ besitzt. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass $F(z)$ für alle $\Re(z) > \sigma_0 - \varepsilon$ als Dirichlet-Reihe konvergiert. (In anderen Worten: Die Konvergenz einer Dirichlet-Reihe F mit positiven reellen Koeffizienten kann nur durch eine Singularität von F eingeschränkt sein.)*

Beweis. OBdA sei $\sigma_0 = 0$ (sonst betrachte $z - \sigma_0$ statt z). Dann ist F nach Voraussetzung holomorph für $\Re(z) > 0$ sowie auch in einer Umgebung von 0. Damit ist F holomorph auch in einer Kreisscheibe $|z - 1| \leq 1 + \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$. Taylor-Entwicklung von F um 1 liefert

$$F^{(k)}(z) = \sum_{n \geq 1} a_n (-\lambda_n)^k e^{-\lambda_n z}, \ \Re(z) > 0,$$

$$F^{(k)}(1) = \sum_{n \geq 1} a_n (-\lambda_n)^k e^{-\lambda_n} = (-1)^k \sum_{n \geq 1} \lambda_n^k a_n e^{-\lambda_n}$$

$$\Rightarrow F(-\varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}(1+\varepsilon)^k (-1)^k F^{(k)}(1) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{n \geq 1} \lambda_n^k a_n e^{-\lambda_n} =$$

$$= \sum_{n \geq 0, k \geq 1} a_n \frac{1}{k!}(1+\varepsilon)^k \lambda_n^k e^{-\lambda_n} = \sum_{n \geq 0} a_n e^{-\lambda_n} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!}(1+\varepsilon)^k \lambda_n^k \quad (\text{abs. Konv. wg. } a_n \geq 0)$$

$$= \sum_{n \geq 0} a_n e^{-\lambda_n} e^{\lambda_n (1+\varepsilon)} = \sum_{n \geq 0} a_n e^{\lambda_n \varepsilon},$$

wobei der letzte Ausdruck gerade unsere Dirichlet-Reihe an der Stelle $z = -\varepsilon$ ist, d.h. $F(z)$ konvergiert als Dirichlet-Reihe für $z = -\varepsilon$ und somit auch für ganz $\Re(z) > -\varepsilon$. □

Theorem 2. *(Zeta-Funktion)*

(1) *$\zeta(s)$ besitzt meromorphe Fortsetzung zu $\Re(s) > 0$ mit einfacher Singularität in $s_0 = \sigma_a = 1$, und zwar*

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}, \ \Re(s) > 0.$$

(2) *Für $s > 1$ reell ist $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + O(1)$.*

Beweis.
Zu (1): Betrachte die Dirichlet-Eta-Funktion $\eta(s) := \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$. Nach der Formel für σ_c hat die Eta-Funktion die Konvergenzabszisse $\sigma_c = 0$. Die Behauptung folgt nun mit der Betrachtung der Summe $\eta(s) + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ für $\Re(s) > 1$.
Zu (2): Die Eulersche Summationsformel liefert:

$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{n^s} = \int_1^x \frac{dt}{t^s} - s\int_1^x \frac{\{t\}}{t^{s+1}}dt + 1 - \frac{\{x\}}{x^s} =$$

$$= \frac{x^{s-1}}{1-s} - \frac{1}{1-s} - s\int_1^x \frac{\{t\}}{t^{s+1}}dt - \frac{\{x\}}{x^s},$$

wobei $\{x\} := x - [x]$ den Bruchteil von x bezeichnet. Nun mit $x \to \infty$ folgt für $\Re(s) > 1$:

$$\zeta(s) = -\frac{1}{1-s} - s\int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}}dt + 1 = \frac{1}{s-1} + 1 - \underbrace{\int_1^\infty \frac{\{t\}s}{t^{s+1}}dt}_{:=R_0(s)},$$

und $\limsup_{\sigma\to\infty} R_0(s) = 0$ nach Fatou. □

Theorem 3. *(Dirichlet-L-Reihen) Sei $\chi \in \hat{G_m}$. Dann:*

(1) *Für $\chi \neq \chi_0$ hat $L(s,\chi)$ die Konvergenzabszissen $\sigma_c = 0$ und $\sigma_a = 1$, und für $\Re(s) > 1$ gilt die Produktdarstellung:*

$$L(s,\chi) = \prod_p (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1}.$$

(2) *$L(s,\chi_0) = \zeta(s)\prod_{p|m}(1-p^{-s})$ für $\Re(s) > 1$. Insbesondere lässt sich $L(s,\chi_0)$ meromorph zu $\Re(s) > 0$ fortsetzen, mit einfacher Singularität in $s_0 = 1$.*

Beweis. Zu (1): Wegen der Orthogonalität von χ in G_m folgt, dass die Summen $\sum_{1\leq j\leq n} \chi(j)$ für $n \in \mathbb{N}$ uniform beschränkt sind. Damit folgt unmittelbar, dass $\sigma_c = 0$. Rest der Behauptung ist klar. □

3. Das Nicht-Verschwinden von $L(1,\chi)$

Sei $q \in \mathbb{N}$ mit $(q,m) = 1$. Wir definieren die Größen $f(q) := Ord(\bar{q})$ in G_m und $g(q) := \frac{\varphi(m)}{f(q)} = [G_m : (\bar{q})]$.

Lemma 2. *Für $(q,m) = 1$ wie oben gilt:*

$$\prod_{\chi\in\hat{G_m}} (1 - \chi(q)z) = (1 - z^{f(q)})^{g(q)}, \; z \in \mathbb{C}.$$

Beweis. Betrachte μ_n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Es gilt die Identität

$$\prod_{\omega\in\mu_n} (1 - \omega z) = 1 - z^n,$$

da beide Polynome gleiche Nullstellen über $\mathbb{C}$ mit Vielfachheit 1 haben und sich somit nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, der sich mit $z = 0$ als 1 ergibt. Nun, mit $n = f(q)$, gibt es zu jedem $\omega \in \mu_{f(q)}$ genau $[G_m : (\bar{q})] = g(q)$ Charaktere $\chi \in \hat{G_m}$ mit $\chi(q) = \omega$. □

Definition 4.

$$\zeta_m(s) := \prod_{\chi \in \hat{G_m}} L(s, \chi)$$

Theorem 4. *Für $\Re(s) > 1$ gilt:*

$$\zeta_m(s) = \prod_{p \nmid m} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p^{f(p)s}}\right)^{g(p)}}$$

ist Dirichlet-Reihe mit positiven Koeffizienten.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\zeta_m(s) = \prod_{\chi \in \hat{G_m}} L(s, \chi) &= \prod_{\chi \in \hat{G_m}} \prod_{p} \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}} = \\
&= \prod_{\chi \in \hat{G_m}} \prod_{p \nmid m} \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}} = \qquad \text{(wegen } \chi(p) = 0, \text{ falls } p|m) \\
&= \prod_{p \nmid m} \prod_{\chi \in \hat{G_m}} \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}} = \prod_{p \nmid m} \frac{1}{\prod_{\chi \in \hat{G_m}} (1 - \chi(p)p^{-s})} = \\
&= \prod_{p \nmid m} \frac{1}{(1 - p^{-sf(p)})^{g(p)}} = \prod_{p \nmid m} \left(\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(p^{kf(p)})^s} \right)^{g(p)}, \qquad \text{(Lemma 2. mit } z = p^{-s})
\end{aligned}$$

wobei der letzte Ausdruck endliches Produkt von Dirichlet-Reihen mit nicht-negativen reellen Koeffizienten ist. Damit folgt auch die Behauptung. □

Theorem 5.

(1) *ζ_m hat einfaches Pol in $s_0 = 1$;*
(2) *$\forall \chi \neq \chi_0 : L(1, \chi) \neq 0$.*

Beweis. (2)⇒(1): Wenn $\forall \chi \neq \chi_0 : L(1, \chi) \neq 0$, so folgt, dass ζ_m gerade die Singularität von ζ vererbt durch

$$L(s, 1) = \zeta(s) \prod_{p|m} (1 - p^{-s}).$$

Zu(2): Angenommen, dass $L(1, \chi) = 0$ für ein $\chi \neq \chi_0$. Dann wäre ζ_m holomorph in $s_0 = 1$ und damit auch in $\Re(s) > 0$ als endliches Produkt holomorpher Funktionen in $\Re(s) > 0$. Nach dem Lemma von Landau folgt nun, dass die Dirichlet-Reihe von ζ_m auch für $\Re(s) > 0$ konvergiert. Mit s reell gilt für den p-ten Term von ζ_m:

$$\frac{1}{(1 - p^{-f(p)s})^{g(p)}} = \left(1 + \sum_{k \geq 1} (p^{-f(p)s})^k \right)^{g(p)} \geq 1 + \sum_{k \geq 1} (p^{-\varphi(m)s})^k,$$

da $f(p) \leq \varphi(m)$ und $g(p) \geq 1$. Außerdem gilt offenbar:

$$\prod_{p \nmid m} \left(\sum_{k \geq 0} (p^k)^{-\varphi(m)s} \right) \geq \sum_{(n,m)=1} n^{-\varphi(m)s}.$$

Mit $s = \frac{1}{\varphi(m)}$ wird also die letzte Dirichlet-Reihe zu divergenter Minorante der Dirichlet-Reihe von ζ_m. *Widerspruch.* □

4. Dirichlet Theorem über Primzahlen in arithmetischen Progressionen

Lemma 3. *Für Re$(s) > 1$ gilt:*

(1) $L(s,\chi) \neq 0$;
(2) $\log L(s,\chi) = \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + O(1)$ *für passenden Zweig von* log.

Beweis.
Zu (1): folgt unmittelbar aus der Produktdarstellung von $L(s,\chi)$ (vgl. Theorem 3.).
Zu (2): Definiere

$$G(s,\chi) := \sum_p \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}\chi(p^k)p^{-ks},\ \Re(s) > 1$$

Wegen $\left|\frac{1}{k}\chi(p^k)p^{-ks}\right| \leq p^{-k\sigma}$ folgt die gleichmäßige Konvergenz der Dirichlet-Reihe G auf Streifen $\Re(s) \geq 1+\delta > 1$ (vgl. die elementare Theorie der ζ-Funktion). Insbesondere ist G also stetig für $\Re(s) > 1$. Nun für $|z| < 1$ gilt:

$$\exp\left(\sum_{k\geq 1} \frac{z^k}{k}\right) = (1-z)^{-1}$$

(vgl. Potenzreihe von $\log\left(\frac{1}{1-z}\right)$). Mit $z = \chi(p)p^{-s}$ folgt:

$$\exp\left(\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\chi(p^k)p^{-ks}\right) = (1-\chi(p)p^{-s})^{-1}$$

$$\Rightarrow \exp G(s,\chi) = \exp\left(\sum_p\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\chi(p^k)p^{-ks}\right) = \prod_p \exp\left(\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\chi(p^k)p^{-ks}\right) = L(s,\chi),\ \Re(s) > 1,$$

d.h. $G(s,\chi)$ ist Log-Zweig von $L(s,\chi)$. Außerdem bekommt man für $\Re(s) = \sigma > 1$:

$$G(s,\chi) = \sum_p\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\chi(p^k)p^{-ks} = \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + \underbrace{\sum_p\sum_{k\geq 2}\frac{1}{k}\chi(p^k)p^{-ks}}_{=:R_\chi(s)}$$

und

$$|R_\chi(s)| \leq \sum_p\sum_{k\geq 2} p^{-k\sigma} = \sum_p \frac{p^{-2\sigma}}{1-p^{-\sigma}} \leq \frac{1}{1-2^{-\sigma}}\sum_p p^{-2\sigma} \leq 2\zeta(2),$$

d.h. $R_\chi(s) = O(1)$. □

Theorem 6. *(Dirichlet) Seien $a, m \in \mathbb{N}$ fest mit $(a,m) = 1$. Dann gibt es unendlich viele Primzahlen $p \equiv a(\mathrm{mod} m)$.*

Beweis. Sei $\chi \in \hat{G_m}$ und betrachte $L(s,\chi)$. Nach Lemma 3. gilt für $\Re(s) > 1$:

$$\log L(s,\chi) = \sum_p \chi(p)p^{-s} + O(1)$$

Mit Orthogonalität der Charaktere in $\hat{G_m}$ bekommt man dann:

$$\sum_{\chi \in \hat{G_m}} \bar{\chi}(a) \log L(s,\chi) = \sum_{\chi \in \hat{G_m}} \bar{\chi}(a) \sum_p \chi(p) p^{-s} + O(1) =$$

$$= \sum_p \left(\sum_{\chi \in \hat{G_m}} \bar{\chi}(a)\chi(p) \right) p^{-s} + O(1) = \sum_{p \equiv a (\operatorname{mod} m)} \varphi(m) p^{-s} + O(1) =$$

$$= \varphi(m) \sum_{p \equiv a (\operatorname{mod} m)} \frac{1}{p^s} + O(1)$$

$$\Rightarrow \sum_{p \equiv a (\operatorname{mod} m)} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi \in \hat{G_m}} \bar{\chi}(a) \log L(s,\chi) + O(1).$$

Die letzte Summe zerlegen wir für $\chi = \chi_0$ und $\chi \neq \chi_0$. Ab jetzt sei s reell. Wegen $L(s,\chi_0) = \zeta(s) \prod_{p|m} (1 - p^{-s})$ für $s > 1$ folgt, dass

$$\frac{1}{\varphi(m)} \log L(s,\chi_0) = \frac{1}{\varphi(m)} \log \zeta(s) + O(1), \;\; s > 1.$$

Wegen $\forall \chi \neq \chi_0 : 0 < |L(1,\chi)| < \infty$ (vgl. $\sigma_c = 0$) gilt aber $\lim_{s \to 1} |\log L(s,\chi)| < \infty$. Insgesamt folgt aufgrund der Singularität von ζ in $s = 1$:

$$\left(\sum_{p \equiv a (\operatorname{mod} m)} \frac{1}{p^s} \right) \to \infty, \text{wenn } s \to 1, \; s > 1.$$

$\square$

Literatur

[1] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer, 1976.

[2] H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2004.

[3] W. Narkiewicz, *Elementary and analytic theory of algebraic numbers*, Monografie Matematyczne Tom 57, Warszawa 1900.

[4] J. Serre, *A Course in Arithmetic*, Springer, 1973.

[5] H. Davenport, *Multiplicative number theory*, 2ed., Springer, 1980.

[6] K. Ireland, M. Rosen, *A classical introduction to modern number theory*, 2ed., Springer, 1990.

[7] S. Lang, *Algebraic number theory*, 2ed., Springer, 1994.

[8] J. Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*, Springer, 2006.

[9] E. Titchmarsh, *The Theory of The Riemann Zeta-Function*, 2ed., Clarendon Press, Oxford, 1986.