9. Tensorzerlegung

Notiztitel 07.06.2011

Im Falle $n=1$ ist ein Hecke-Charakter

$$\omega : \mathbb{A}^\times = GL_1(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

(i.e. stetiger Quasicharakter, $\omega|_{k^\times} \equiv 1$) zerlegbar als Produkt

$$\omega = \otimes_v \omega_v$$

mit $\omega_v = \omega \circ i_v$. Hier $i_v : k_v^\times \hookrightarrow k^\times \setminus \mathbb{A}^\times$,

$$x_v \longmapsto (\dots 1, 1, x_v, 1, \dots).$$

Dabei bedeutet $\otimes_v \omega_v$ einfach

$$\omega((x_v)) = \prod_v \omega_v(x_v) .$$

Das eingeschränkte Tensorprodukt:

Sei Σ eine Indexmenge (bei uns: $\Sigma = S = S(k/\mathbb{Q})$ für einen Zahlkörper $k/\mathbb{Q}$. Sei $\Sigma_0 \subset \Sigma$ endlich. Sei V_v $\mathbb{C}$-VRaum für alle $v \in \Sigma$. Seien $\xi_v^0 \in V_v$ für alle $v \in \Sigma \setminus \Sigma_0$.

Wir erhalten das System

$$\Omega := \{ S \subset \Sigma \mid \Sigma_0 \subset S \}$$

mit der Ordnung $S \subset S'$ für $S, S' \in \Omega$.
Dazu haben wir die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} \lambda_{S,S'} : \bigotimes_{v \in S} V_v &\longrightarrow \bigotimes_{v \in S'} V_v \\ x &\longmapsto x \otimes \bigotimes_{v \in S' \setminus S} \xi_v^0 \end{aligned}$$

$$\bigotimes_{v \in \Sigma} V_v := \varinjlim_{S \in \Omega} \bigotimes_{v \in S} V_v .$$

<u>(9.1) Satz:</u> Wohldefiniert und unabhängig von Σ_0, ξ_v^0, – bis auf Isomorphie. $\otimes V_v$ wird aufgespannt von Symbolen $\otimes x_v$ mit $x_v \in X_v$ und $x_v = \xi_v^0$ für fast alle $v \in \Sigma$.

<u>Beobachtung:</u> Wenn (π_v, V_v) Darstellungen von $G_v = GL_2(k_v)$ oder $K_v = GL_2(\mathcal{O}_v)$ sind mit

$$\pi_v(k_v)(\xi_v^0) = \xi_v^0 \quad , k_v \in K_v, \text{ für fast alle } v \in S,$$

so definiert die folgende Festsetzung eine Darstellung:

$$\otimes_v \pi_v((g_v))(\xi_v) := \otimes \pi_v(g_v)(\xi_v) .$$

<u>(9.2) THEOREM:</u> Sei (π, V) irred. und zulässige Darstellung von $G(\mathbb{A})$ (i.e. $(\mathfrak{g}, K_\infty) \times G(\mathbb{A}_{fin})$ - Modul). Dann:

1° $\forall v \in S_\infty$ $\exists$ irred. zulässiger $(\mathfrak{g}_\infty, K_v)$-Modul (π_v, V_v)

2° $\forall v \in S \setminus S_\infty$ $\exists$ irred. zul. $G(F_v)$-Modul (π_v, V_v)

mit $\quad \pi \cong \bigotimes \pi_v$.