8. Automorphe Darstellungen

Notiztitel 06.06.2011

Es sollen Darstellungen von $G = GL_2(\mathbb{A})$ unter Verwendung von $\mathcal{A}(G,\omega) \subset \mathrm{Abb}(G,\mathbb{C})$ sein.
Aber die "Rechtsdarstellung" von G auf $\mathcal{A}(G,\omega)$ ist keine Darstellung, die Wirkung von $g_\infty \in G_\infty$ erhält die Eigenschaft "K_∞-endlich" (Nr. 3) nicht.

Als Ersatz hat man aber die Rechtswirkung von $G(\mathbb{A}_{fin})$ zusammen mit der Rechtswirkung von K_∞ und der infinitesimalen Rechtswirkung von $\mathfrak{g} = (\mathrm{Lie}_{\mathbb{R}} G_\infty)_{\mathbb{C}}$.

(8.1) DEFINITION: Der $\mathbb{C}$-VRaum V ist ein $(\mathfrak{g}, K_\infty)$-Modul :<=> Es gibt 2 Wirkungen von $\mathfrak{g}$ und K_∞ die kompatibel und K_∞-endlich sind:

- $k \cdot X \cdot v = \mathrm{Ad}_k X \cdot k \cdot v \quad (k \cdot X \cdot k^{-1} \cdot w = \mathrm{Ad}_k X \cdot w)$
- $\forall v \in V$: $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{k \cdot v : k \in K_\infty\}$ endlichdim.

  (<=> V zerfällt in eine direkte Summe von K_∞-invarianten endlichdim. Teilräumen)

Beispiele: Bedingung erfüllt in der Situation $\mathcal{A}(G,\omega)$.

<u>(8.2) DEFINITION:</u> 1° $(\mathfrak{g}, K_\infty) \times G(\mathbb{A}_{fin})$ - Modul ist ein $(\mathfrak{g}, K_\infty)$ - Modul mit $G(\mathbb{A}_{fin})$ - Wirkung, so dass die Wirkung von $G(\mathbb{A}_{fin})$ mit der von $\mathfrak{g}$ & der von K_∞ kommutiert. Beispiel: $V = \mathcal{A}(G, \omega)$.

Sei V ein $(\mathfrak{g}, K_\infty) \times G(\mathbb{A}_{fin})$ - Modul.

2° V heißt *zulässig* :<=> Für alle irred. Darst. σ von $K_\infty K$ gilt σ kommt höchstens endlich oft in V vor. Beispiel: $\mathcal{A}(G, \omega)$, $K = K_0(N)$ oder andere Arithmetik

3° V *irreduzibel* :<=> $\forall W \subset V$: W invariant bezüglich $\mathfrak{g}$ und K_∞ und $G(\mathbb{A}_{fin})$ $\Rightarrow$ $W = 0$ oder $W = V$

4° V *automorphe Darstellung* :<=> irreduzibles Subquotient von $\mathcal{A}(G, \omega)$ für ω geeignet (i.e. irreduzible Unterdarstellung eines Quotienten von $\mathcal{A}(G, \omega)$).