4. Hauptserien von $GL_2(F)$

Notiztitel 06.06.2011

Es geht um die Darstellungen von $G = GL_2(F)$ für einen p-adischen Körper F (d.h. $F/\mathbb{Q}_p$ endliche Erweiterung.

Fakten: • $G \subset M_2(F) \cong F^4$ ist topologische Gruppe,
- G ist unimodular
- $G = ANK$ mit

A = Gruppe der Diagonalmatrizen $\subset G$

$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in F \right\} \subset G$

$K = GL_2(\mathcal{O}_F) \subset G$ kpte offene Untergruppe

Die Haarmaße auf den Gruppen A, N, K sowie G lassen sich so normieren, dass

$$\int_G h(x)\,dx = \int_A \int_N \int_K h(ank)\,da\,dn\,dk$$

für $h: G \to \mathbb{C}$ integrierbar.

<u>DEFINITION</u>: $\mu: A \to \mathbb{C}$ <u>Quasicharakter</u>, wenn Homomorphismus; <u>Charakter</u>, wenn Quasicharakter mit $|\mu(a)| = 1$ für alle $a \in A$.

<u>BEISPIELE</u>: $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$, $\mu\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} := |a_1|^{s_1} |a_2|^{s_2}$

$$\delta\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \frac{|a_1|}{|a_2|}$$

Für Quasicharaktere $\mu_1, \mu_2 : F^\times \to \mathbb{C}$ ist $\mu : A \to \mathbb{C}$

$$\mu\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} := \mu_1(a_1)\mu_2(a_2)\ , \quad a_1, a_2 \in F,$$

Quasicharakter auf A. Beispiele für μ_i: $\omega_s(y) = |y|^s$, $y \in F^\times$.

Die INDUZIERTE DARSTELLUNG auf G zu $\mu : A \to \mathbb{C}$ ist

$$I(\mu) := \{ h : G \to \mathbb{C} \mid h(ank) = \mu(a)\,\delta(a)^{1/2} h(k) \text{ \& } h \text{ glatt} \}$$

(h ist <u>glatt</u>, d.h. $h(gk) = h(g)$ für $k \in K'$ für eine offene Untergruppe $K' \subset G$.). Alternativ:

$$V(\mu) := \{ h : G \to \mathbb{C} \mid h(ank) = \mu(a)\,\delta(a)^{1/2} h(k) \text{ f.ü. } \\ \text{\& } h \text{ messbar \& } \int_K |h(k)|^2 dk < \infty \}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle h, h' \rangle := \int_K h(k)\,\bar{h}'(k)\,dk,$$

so dass $V(\mu)$ (nach der üblichen Identifizierung von h mit h' für $\int |h - h'|^2 dk = 0$) ein Hilbertraum wird.

In beiden Fällen interessiert die Rechtsdarstellung

$$\pi_\mu(g)\,h(x) := h(xg) \quad \text{für } h \in I(\mu) \text{ (oder } V(\mu)),\ x, g \in G$$

<u>(4.1) THEOREM:</u> 1° $I(\mu)$ irreduzibel $\iff \mu_1\mu_2^{-1} \neq \omega_{\pm 1}$.

2° $\mu_1\mu_2^{-1} = \omega_1 \Rightarrow I(\mu)$ hat irred. Unterdarst. $\sigma(\mu) \subset I(\mu)$ und $I(\mu)/\sigma(\mu)$ eindimensional.

3° $\mu_1\mu_2^{-1} = \omega_{-1} \Rightarrow I(\mu)$ hat eindim. Unterdarst. W mit $I(\mu)/W = \sigma(\mu)$ unendlichdim. Darstellung

<u>4.3 DEFINITION</u>: 1° Eine Darstellung $\pi : G \to GL(V)$ heißt *zulässig*, wenn für jede irred. Darstellung $\sigma : K \to GL(V)$ die Multiplizität von σ in V endlich ist, d.h. es gibt nur endlich viele Unterdarstellungen $\pi|_K : K \to GL(W_j)$ die zu σ äquivalent sind.

2° Eine zulässige und irreduzible Darstellung $\pi : G \to GL(V)$ heißt *(super-) kuspidal* $:\iff$

$$\mathrm{Hom}_G(\pi, \pi_\mu) = \{0\} \text{ für alle Quasich. } \mu : A \to \mathbb{C}..$$

d.h. es gibt keine nichttriviale lineare Abbildung $\Phi : V \to I(\mu)$ mit

$$\Phi \circ \pi(g) = \pi_\mu(g) \circ \Phi, \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi(g)"'] & I(\mu) \arrow[d, "\pi_\mu(g)"] \\ V \arrow[r, "\Phi"] & I(\mu) \end{tikzcd}.$$

Langlands Correspondence: Zu π kuspidal bestimme L-Funktion & ε-Faktor. Entspricht Weildarst. mit L & ε.