

§ 48 Symplektische Geometrie und Klassische Mechanik

Zusammenfassung

Zum Schluss der Vorlesung gehen wir noch auf eine geometrische Struktur ein, die wie die euklidische oder die Minkowski-Struktur im Rahmen der Linearen Algebra formuliert werden kann und die eine enge Beziehung zur Klassischen Mechanik aufweist. Die Betonung der symplektischen Struktur auf dem Phasenraum eines (konservativen) klassischen Systems bedeutet bereits die Formulierung der Bewegungsgleichungen in der kanonischen Form, das heißt als Hamiltonsche Gleichungen. Abschließend erwähnen wir den Sprung von der Hamiltonschen Mechanik zur Quantenmechanik, die zum Auffinden von quantenmechanischen Modellen von großer Bedeutung ist: Die sogenannte *kanonische* Quantisierung.

In diesem Paragraphen ist V stets ein endlichdimensionaler Vektorraum über \mathbb{R} .

(48.1) Definition: Eine *symplektische Form* auf V ist eine bilineare Abbildung $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, die

- 1° alternierend ist, d.h. es gilt stets $\beta(v, w) = -\beta(w, v)$, und die
- 2° nichtausgeartet ist.

Die zweite Bedingung bedeutet, dass die zugehörige lineare Abbildung

$$V \rightarrow V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R}) \quad , \quad v \mapsto \beta(v, \cdot) \quad ,$$

bijektiv ist oder – äquivalent dazu –, dass bezüglich irgendeiner Basis (b_1, b_2, \dots, b_n) von V die Matrix $B = (\beta(b_i, b_j))$ invertierbar ist (bzw. dass $\det B \neq 0$ gilt). Aufgrund der Linearität von β in beiden Variablen gilt für Spaltenvektoren $x, y \in \mathbb{R}^m$, $m = \dim V$:

$$\beta(v, w) = x^\top B y \quad , \quad \text{wobei } v = x^j b_j, w = y^j b_j \quad .$$

(48.2) Zwei einfache Beispiele:

1° Im eindimensionalen Fall ist jede alternierende bilineare Abbildung identisch 0, da $\beta(v, v) = 0$, für $v \in V$.

2° Im Falle $\dim V = 2$ sei (b_1, b_2) eine Basis von V . dann gilt für die oben genannte Matrix $\beta(b_i, b_i) = 0$ und $\beta(b_1, b_2) = -\beta(b_2, b_1) =: c$. Es ist $c \neq 0$, sonst wäre β ausgeartet. Deshalb kann b_1 durch $\frac{1}{c} b_1$ ersetzt werden, also ohne Einschränkung der Allgemeinheit $c = 1$ angenommen werden. Das bedeutet, dass β bezüglich dieser Basis die Form

$$\beta(x^1 b_1 + x^2 b_2, y^1 b_1 + y^2 b_2) = x^1 y^2 - x^2 y^1$$

hat. Und die Matrix B hat bezüglich dieser Basis die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Allgemeiner gilt in Analogie zu diesen Beispielen:

(48.3) Satz: Sei β symplektische Form auf V . Dann gilt $\dim V = 2n$, und es gibt eine Basis $(b_1, b_2, \dots, b_{2n})$, so dass

$$\beta(x, y) = \sum_{i=1}^n (x^i y^{n+i} - x^{n+i} y^i),$$

$x = \sum_{j=0}^{2n} x^j b_j$, $y = \sum_{j=0}^{2n} y^j b_j$. Die Matrix B hat bezüglich dieser Basis die Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei E_n die $n \times n$ -Einheitsmatrix, also die *Eins* in der Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$ ist.

Beweis wie zum entsprechenden Satz zum euklidischen Skalarprodukt.

(48.4) Beispiel aus der Klassischen Mechanik:

Nach der Wahl eines kartesischen Koordinatensystems ist der Phasenraum P zu einem klassischen System beispielsweise $P = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, wenn n die Anzahl der Freiheitsgrade ist, oder $P = Q \times \mathbb{R}^n$ mit einer offenen Teilmenge Q von \mathbb{R}^n . Hier jetzt mit der Interpretation, dass der zweite Faktor \mathbb{R}^n als Dualraum zu \mathbb{R}^n aufgefasst wird, das heißt – aus physikalischer Sicht – als Raum der Impulse (und nicht als Raum der Geschwindigkeiten). Insofern ist P genau genommen der *Kotangentenraum* $T^*Q = Q \times (\mathbb{R}^n)^*$. (Das trifft auch zu für einen allgemeineren Konfigurationsraum mit einer Mannigfaltigkeit Q als *Lageraum*: $P = T^*Q$.)

Im folgenden sei $Q = \mathbb{R}^n$.

Die Koordinaten eines Vektors aus $P = T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ schreiben wir im folgenden in der Form $x = (q, p)^\top$ mit $q = (q^1, q^2, \dots, q^n)^\top$, $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)^\top$. Das sind die Koordinaten bezüglich der Standardbasis e von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$, mit der folgenden Indizierung: $e = (e_1, e_2, \dots, e_n, e^1, e^2, \dots, e^n)$. Also gilt $q = q^i e_i$ und $p = p_i e^i$ sowie $x = q^i e_i + p_i e^i$. Die *standardmäßige symplektische Form* ist nun

$$\omega(x, x') = q^i p'_i - q'^i p_i = q^\top p' - q'^\top p,$$

das ist die Form zu der folgenden Blockmatrix (vgl. 48.3)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}.$$

Die symplektische Form ω (bzw. die Matrix σ) bestimmt die lineare Abbildung

$$P \rightarrow P, \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p \\ -q \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix},$$

die wir wieder mit σ bezeichnen.

(48.5) Definition (Symplektischer Gradient):

Für eine Funktion $F \in \mathcal{C}^\infty(P, \mathbb{C}) =: \mathcal{E}(P) =: \mathcal{E}$ (wobei $P = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$) ist

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial q^1}, \frac{\partial F}{\partial q^2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial q^n}, \frac{\partial F}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial p_n} \right)^\top$$

der übliche Gradient und

$$\nabla_\sigma F := \sigma \circ \nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial p_1}, \frac{\partial F}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial p_n}, -\frac{\partial F}{\partial q^1}, \dots, -\frac{\partial F}{\partial q^n} \right)^\top$$

der *symplektische Gradient*, der meist als Vektorfeld

$$X_F := \nabla_\sigma F$$

und in Kurzform als

$$X_F = \left(\frac{\partial F}{\partial p}, -\frac{\partial F}{\partial q} \right)^\top$$

geschrieben wird. X_F heißt auch das *Hamiltonsche Vektorfeld* zu $F \in \mathcal{E}$.

(48.6) Definition (Hamiltonsche Gleichungen):

Die *Hamiltonschen Gleichungen* zu $H \in \mathcal{E}$ sind die folgenden partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\dot{x} = X_H(x).$$

Ausführlicher mit $x = (q, p)^\top$:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

Eine Lösung der Hamiltonschen Gleichungen ist jede differenzierbare Kurve $x : [a, b] \rightarrow P$ mit

$$\dot{x}(t) = X_H(x(t)), \quad t \in [a, b].$$

Ausführlicher mit $x = (q, p)^\top$:

$$\dot{q}^i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t), p(t)), \quad \dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(q(t), p(t)), \quad t \in [a, b],$$

für $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Ein *Hamiltonsches System* ist ein Phasenraum P mit einer Funktion $H \in \mathcal{E}$ (In der Regel hat H die Interpretation als Energie.) H bestimmt durch die zugehörigen Hamiltonschen Gleichungen die Dynamik des Systems. Die Lösungen des Systems, das heißt die Lösungen der Hamiltonschen Gleichungen, heißen auch *Bewegungen* des Hamiltonschen Systems (P, H) und die Hamiltonschen Gleichungen heißen auch

Bewegungsgleichungen oder *kanonische Gleichungen*.

(48.7) Beispiele:

1° Der harmonische Oszillator: $P = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $H = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$. Die Bewegungsgleichungen (Hamiltonsche Gleichungen) sind

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -q.$$

2° Das Keplerproblem (vgl. § 34): $P = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^3$ und

$$H = \frac{1}{2m} |p|^2 - k \frac{1}{|q|},$$

$m > 0, k > 0$. Die Bewegungsgleichungen sind

$$\dot{q} = \frac{1}{m} p, \quad \dot{p} = -k \frac{q}{|q|^3}.$$

3° Als Verallgemeinerung zu 2°: Gegeben sei ein konservatives Kraftfeld ∇U mit den Bewegungsgleichungen $\ddot{q} = -\nabla U$. Durch die zugehörige Hamiltonfunktion $H = \frac{1}{2}p^2 + U(q)$ werden äquivalente Bewegungsgleichungen geliefert. Denn die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen sind

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\nabla U.$$

4° Allgemeiner als in 3° lassen sich gewisse Lagrange-Systeme (TQ, L) transformieren zu Hamiltonschen Systemen. Hier ist $Q \subset \mathbb{R}^n$ offen und $TQ = Q \times \mathbb{R}^n$ ist der Tangentialraum (Geschwindigkeitsphasenraum) sowie $L \in \mathcal{E}(TQ)$, $L = L(q, v)$, die Lagrangefunktion. Die Bewegungsgleichungen (Euler–Lagrange–Gleichungen, vgl. § 33) sind dann

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

Zur Beschreibung der angesprochenen Transformation von Lagrange-Systemen in Hamiltonsche Systeme setze man zunächst

$$p := \frac{\partial L}{\partial v}(q, v)$$

für die verallgemeinerten Impulse. Wenn diese Gleichung eine Auflösung $v = \Phi(q, p)$ nach v zulässt (das ist nach dem Satz über implizite Abbildungen zum Beispiel lokal der Fall, wenn die Matrix

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} \right)$$

invertierbar ist, und solche Lagrange-Systeme heißen *regulär*), dann ist die Funktion

$$H(q, p) := p^2 - L(q, \Phi(q, p))$$

eine geeignete Hamiltonfunktion, deren Hamiltonsche Gleichungen äquivalent zu den Euler–Lagrange–Gleichungen zu L sind.

Die symplektische Struktur des Phasenraumes P überträgt sich in gewisser Weise auf den Raum $\mathcal{E}(P)$ der Observablen:

(48.8) Definition (Poissonklammern):

Die *Poissonklammer* von zwei klassischen Observablen $F, G \in \mathcal{E}$ ist

$$\{F, G\} := \omega(X_F, X_G) = \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial q} = \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i}.$$

(48.9) Satz von Poisson (Bewegungsgleichungen in Poissonform):

$$x(t) \text{ ist Bewegung von } (P, H) \iff \dot{F} = \{F, H\} \quad \forall F \in \mathcal{E}$$

Beweis: Für eine Kurve $x = x(t)$ und $F(t) = F(x(t))$ gilt: x ist genau dann eine Bewegung, wenn $\dot{x} = X_H(x)$, also wenn

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial F}{\partial p} \dot{p} = \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial p} \left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) = \{F, H\}.$$

(48.10) Folgerung: Für $F \in \mathcal{E}$ gilt:

$$F \text{ ist Bewegungskonstante} \iff \{F, H\} = 0$$

Beweis: F ist dabei definitionsgemäß eine *Bewegungskonstante*, wenn für alle Bewegungen $x = x(t)$ des Hamiltonschen Systems (P, H) die Funktion $F(x(t))$ konstant ist. Daher direkt nach 48.9: $\dot{F} = 0 \iff \{F, H\} = 0$

(48.11) Satz: Die Poissonklammer $\{, \}$ erfüllt:

- 1° $\{, \}$ ist bilinear.
- 2° $\{F, G\} = -\{G, F\}$ ($\{, \}$ ist alternierend).
- 3° $\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0$ ($\{, \}$ erfüllt die *Jacobi-Identität*).
- 4° $\{F, GH\} = G\{F, H\} + \{F, G\}H$.
- 5° G ist konstant $\iff \{F, G\} = 0 \quad \forall F \in \mathcal{E}$

Hinweis: Die Eigenschaften 1° – 3° bedeuten, dass \mathcal{E} mit der Klammer $\{, \}$ eine *Lie-Algebra* ist.

Beweis: Direktes nachrechnen!

(48.12) Korollar: Es seien $F, G \in \mathcal{E}$ Bewegungskonstante des Systems (P, H) , dann ist auch $\{F, G\}$ eine Bewegungskonstante.

Beweis: Direkt aus 48.11.3° .

Zum Schluss kommen wir kurz zu dem Konzept der *kanonischen Quantisierung*:

Klassische Mechanik: Die Menge der klassischen Observablen zu einem Phasenraum P ist der Vektorraum $\mathcal{E}(P)$. Zusammen mit der Poissonklammer gibt das die *Observablenalgebra* $(\mathcal{E}(P), \{ , \})$, die eine Lie-Algebra ist.

Quantenmechanik: Der Phasenraum eines quantenmechanischen Systems wird durch einen komplexen Hilbertraum W repräsentiert (vgl. § 47). Die Menge der quantenmechanischen Observablen W ist dann die Menge \mathcal{O} der (beschränkten und unbeschränkten) selbstadjungierten Operatoren auf W . Eine zur Poissonstruktur ähnliche Struktur liefert der Kommutator $[A, B] := A \circ B - B \circ A$ für Operatoren auf W .

Kanonische Quantisierung:

1° Vorgegeben ist ein Hamiltonsches System (P, H) . Dazu wird eine Unter-algebra $\mathfrak{a} \in (\mathcal{E}(P), \{ , \})$ festgelegt bzw. ausgewählt mit $1 \in \mathfrak{a}$, $q^i \in \mathfrak{a}$, $p_i \in \mathfrak{a}$ und $H \in \mathfrak{a}$. \mathfrak{a} enthält die klassischen Observablen, die es zu quantisieren gilt.

2° Eine kanonische Quantisierung (von \mathfrak{a}) ist dann eine Zuordnung

$$\mathfrak{a} \rightarrow \mathcal{O}, F \mapsto \hat{F},$$

welche die Klammern respektiert, das heißt, dass

$$\{F, G\} = c[\hat{F}, \hat{G}] \text{ für alle } F, G \in \mathfrak{a}$$

gilt (mit einer Konstanten $c \in \mathbb{C}$) und außerdem die Identitäten

$$\hat{1} = id_W = 1, [\hat{p}_\nu, \hat{q}^\mu] = i\delta_\nu^\mu$$

erfüllt sind.

\hat{H} bestimmt dann die Dynamik des quantenmechanischen Systems.

Eine solche kanonische Quantisierung ist in der Regel nicht eindeutig bestimmt. Die Existenz ist auch nicht für alle \mathfrak{a} gegeben, zum Beispiel nicht für $\mathfrak{a} = \mathcal{E}(P)$.

Die kanonische Quantisierung liefert allerdings viele wichtige quantenmechanische Modelle.