E. Spektralschar und Spektralsatz für allgemeine selbstadjungierte Operatoren

Im folgenden steht $\mathbb{K}$ wieder für den Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, und H ist ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$.

(46.14) Definition: Für selbstadjungierte Operatoren $A, B \in \mathcal{B}(H)$ wird definiert:

1° $A \geq 0 \quad :\Longleftrightarrow \quad \left\langle Az, z \right\rangle \geq 0$ für alle $z \in H$.
2° $A \geq B \quad :\Longleftrightarrow \quad A - B \geq 0$.

(46.15) Beispiele:

1° Jede orthogonale Projektion $P \in \mathcal{B}(H)$ erfüllt $P \geq 0$. Denn P ist selbstadjungiert, und für $z \in H$ ist $\left\langle Pz, z \right\rangle = \left\langle Pz, Pz + (z - Pz) \right\rangle = \left\langle Pz, Pz \right\rangle \geq 0$, wegen $\left\langle Pz, z - Pz \right\rangle = \left\langle z, Pz - PPz \right\rangle = 0$.

2° Ist Q eine weitere orthogonale Projektion, so gilt:

$$P \geq Q \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Im} Q \subset \operatorname{Im} P \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Ker} P \subset \operatorname{Ker} Q$$

Die zweite Äquivalenz folgt sofort, da allgemein bei einer orthogonalen Projektion $\operatorname{Ker} P$ das orthogonale Komplement zu $\operatorname{Im} P$ ist.

Um „$P \geq Q \Rightarrow \operatorname{Im} Q \subset \operatorname{Im} P$“ zu zeigen, sei $z \in \operatorname{Im} Q$. Dann ist $Qz = z$ und die Voraussetzung liefert: $\left\langle z, z \right\rangle = \left\langle Qz, z \right\rangle \leq \left\langle Pz, z \right\rangle$. Daraus folgt $Pz = z$, denn für $z = Pz + w, w = z - Pz$, ist $\left\langle z, z \right\rangle = \left\langle Pz, Pz \right\rangle + \left\langle w, w \right\rangle$ und $\left\langle Pz, z \right\rangle = \left\langle Pz, Pz \right\rangle$, also $w = 0$ wegen $\left\langle z, z \right\rangle \leq \left\langle Pz, z \right\rangle$, also $\left\langle z, z \right\rangle \geq \left\langle z, z \right\rangle + \left\langle w, w \right\rangle$ d.h. $0 \geq \left\langle w, w \right\rangle$. Daher ist $z \in \operatorname{Im} P$, das heißt $\operatorname{Im} Q \subset \operatorname{Im} P$.

Für die umgekehrte Implikation sei zunächst $z \in \operatorname{Im} P$. Dann Gilt $Pz = z$ und daher $\left\langle Pz, z \right\rangle = \left\langle z, z \right\rangle$, also $\left\langle Qz, z \right\rangle \leq \left\langle Pz, z \right\rangle$. Für $z \in \operatorname{Ker} P$ folgt $z \in \operatorname{Ker} Q$, also $0 = \left\langle Qz, z \right\rangle \leq \left\langle Pz, z \right\rangle = 0$.

3° Für orthogonale Projektionen P, Q folgt aus $P \geq Q$: $Q = P \circ Q = Q \circ P$. Denn die direkte Zerlegung $H = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Ker} P = \operatorname{Im} Q \oplus \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Ker} Q \oplus \operatorname{Ker} P$ gestattet, sich darauf zu beschränken, die Identitäten nur für die drei Komponenten zu zeigen:

$$\begin{array}{llllll}
z \in \operatorname{Im} Q & \Longrightarrow & Qz = z = Pz & \Longrightarrow & Qz = PQz = QPz \\
z \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Ker} Q & \Longrightarrow & Qz = 0, Pz = z & \Longrightarrow & Qz = PQz = QPz = 0 \\
z \in \operatorname{Ker} P & \Longrightarrow & Qz = 0 = Pz & \Longrightarrow & Qz = PQz = QPz = 0
\end{array}$$

4° Für orthogonale Projektionen P, Q folgt aus $P \geq Q$: $P - Q$ ist eine orthogonale Projektion, und zwar die nach 45.18 eindeutig bestimmte orthogonale Projektion auf den abgeschlossenen Unterraum $\operatorname{Im} P \cap \operatorname{Ker} Q$.

Denn $P - Q$ ist selbstadjungiert, $(P - Q)(P - Q) = P - Q$ nach 3° und $(P - Q)z = z$ genau für die $z \in H$ mit $Pz = z$ und $Qz = 0$, also $z \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Ker} Q$.

5° Für alle selbstadjungierten Operatoren ist $-\|A\| \leq A \leq \|A\|$.

Denn für $z \in H$ ist $\langle Az, z\rangle \leq \left|\langle Az, z\rangle\right| \leq \|Az\| \|z\| \leq \|A\| \|z\|^2 = \langle \|A\| z, z\rangle$ und genauso $\langle -\|A\| z, z\rangle \leq \langle Az, z\rangle$.

(46.16) Satz: (A_k) sei eine monoton wachsende Folge von selbstadjungierten Operatoren.

1° Wenn (A_k) nach oben beschränkt ist, d.h. es gibt $M > 0$ mit

$$\langle A_k z, z\rangle \leq M\langle z, z\rangle \text{ für alle } z \in H,$$

dann gibt es einen eindeutig bestimmten selbstadjungierten Operator A, so dass $(A_k z)$ für jedes $z \in H$ gegen Az konvergiert.

2° Wenn die Folge (A_k) eine monoton steigende Folge von orthogonalen Projektionen ist, so ist sie automatisch nach oben beschränkt, und es gilt: Der Grenzwert A ist wieder eine orthogonale Projektion mit

$$\operatorname{Im} A = \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} \operatorname{Im} A_k}.$$

Eine analoge Aussage gilt für nach unten beschränkte, monoton fallende Folgen (A_k) selbstadjungierter Operatoren. Im Falle von Projektionen A_k ist dann

$$\operatorname{Im} A = \bigcap_{k=0}^{\infty} \operatorname{Im} A_k.$$

Achtung: Die in 46.16 beschriebene Konvergenz ist nicht die Konvergenz der Operatoren in der Norm. Zum Beispiel gilt in $H = \ell_2$ für die orthogonalen Projektionen $A_k z := \sum_{j=0}^{k} \langle e_j, z\rangle e_j$ auf die ersten $k+1$ Komponenten: $A_k \leq A_{k+1}$ und $\lim_{k\to\infty} A_k(z) = \mathrm{id}_H(z) = z$, aber $\|A_k - id_H\| \geq \|A_k(e_{k+1}) - e_{k+1}\| = 1$.

Beweis des Satzes: Die Beschränktheit und Monotonie der Folgen $(\langle A_k z, z\rangle) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ für jedes einzelne $z \in H$ bedeutet unmittelbar, dass die Grenzwerte

$$\lim_{k\to\infty} \langle A_k z, z\rangle \in \mathbb{R}$$

existieren. Das ist der entscheidende Aspekt! Insbesondere konvergiert auch die Folge $(\langle A_k(z+w), z+w\rangle)$, also auch $(\langle A_k z, w\rangle + \langle A_k w, z\rangle)$. Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ konvergiert daher $(\langle A_k z, w\rangle + \langle A_k w, z\rangle) = (\langle A_k z, w\rangle + \langle w, A_k z\rangle) = (2\langle A_k z, w\rangle)$ und damit $(\langle A_k z, w\rangle)$. Im komplexen Fall benutzt man noch zusätzlich die Folgen $(\langle A_k(z+iw), z+iw\rangle)$, um zu zeigen, dass zu allen $z, w \in H$ der Grenzwert $\lim_{k\to\infty}\langle A_k z, w\rangle \in \mathbb{K}$ existiert. Zu jedem $z \in H$ wird also eine Abbildung $w \mapsto \lim_{k\to\infty}\langle A_k z, w\rangle$ definiert. Diese Abbildung ist linear, wie man leicht sieht. Sie ist auch stetig, wie man mit der folgenden Behauptung zeigen kann:

Allgemeine Cauchy–Ungleichung: Sei $\beta : H \to H$ eine symmetrische bzw. hermitesche Bilinearform auf einen $\mathbb{K}$–Vektorraum H, die *positiv–semidefinit* ist, d.h. gilt $\beta(z,z) \geq 0$ für alle $z \in H$. Dann ist

$$|\beta(z,w)|^2 \leq \beta(z,z)\beta(w,w) \text{ für alle } z, w \in H.$$

(Bewiesen wird diese Aussage wie die Cauchy–Ungleichung zu positiv-definiten Bilinearformen.) Wir setzen im folgenden (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) voraus, dass $0 \le A_k$ gilt. Dann ist $\beta(z,w) := \big\langle A_k z, w \big\rangle$ eine positiv semi-definite Bilinearform, die symmetrisch bzw. hermitesch ist, weil A_k selbstadjungiert ist. Also gilt nach der gerade formulierten Cauchy–Ungleichung:

$$\left|\big\langle A_k z, w\big\rangle\right|^2 \le \big\langle A_k z, z\big\rangle\big\langle A_k w, w\big\rangle \le M^2 \|z\|^2 \|w\|^2 .$$

Es folgt $\left|\lim_{k\to\infty}\big\langle A_k z, w\big\rangle\right| \le M \|z\| \|w\|$, d.h. die Linearform ist beschränkt mit Schranke $M\|z\|$ und daher stetig. Also existiert nach dem Satz von Riesz (46.6) ein $Az \in H$, so dass $\lim_{k\to\infty}\big\langle A_k z, w\big\rangle$ von der Form $\big\langle Az, w\big\rangle$ für alle $w \in H$ ist. Die Zuordnung $z \mapsto Az$ ist offensichtlich linear und die gerade hergeleitete Ungleichung zeigt, dass A auch beschränkt ist: $\|Az\| \le M\|z\|$. Die Selbstadjungiertheit von A folgt unmittelbar aus der von A_k: $\big\langle A_k z, w\big\rangle = \big\langle z, A_k w\big\rangle$.

Schließlich gilt auch $\lim_{k\to\infty} A_k z = Az$ (in der Norm!): Dazu verwenden wir wieder die allgemeine Cauchy–Ungleichung und zeigen erst einmal $\|A_k\| \le M$:

$$\begin{aligned}
\|A_k z\|^4 = \left|\big\langle A_k z, A_k z\big\rangle\right|^2 &\le \big\langle A_k z, z\big\rangle\big\langle A_k^2 z, A_k z\big\rangle \\
&\le M\big\langle z, z\big\rangle M\big\langle A_k z, A_k z\big\rangle \\
&\le M^2 \|z\|^2 \|A_k z\|^2 ,
\end{aligned}$$

also $\|A_k z\| \le M\|z\|$. Wegen $0 \le A - A_k \le M$ und daher auch $\|A - A_k\| \le M$ sieht man mit dem gleichen Ansatz:

$$\begin{aligned}
\|(A - A_k)z\|^4 &\le \big\langle (A - A_k)z, z\big\rangle\big\langle (A - A_k)^2 z, (A - A_k)z\big\rangle \\
&\le \big\langle (A - A_k)z, z\big\rangle M\big\langle (A - A_k)z, (A - A_k)z\big\rangle \\
&\le \big\langle (A - A_k)z, z\big\rangle M^3 \|z\|^2 .
\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{k\to 0}\big\langle (A - A_k)z, z\big\rangle = 0$ folgt aus dieser Abschätzung $\lim_{k\to 0} A_k z = Az$.

Die Aussage in 2° kann jetzt unmittelbar gefolgert werden nach der Berücksichtigung von $0 \le A_k \le 1$ für orthogonale Projektionen und $\operatorname{Im} A_k \subset \operatorname{Im} A_{k+1}$ im aufsteigenden Fall (vgl. 46.15).

Wir behandeln den Fall orthogonaler Projektionen aber noch einmal separat mit einem anderen, wesentlich einfacheren Beweis. Sei $U_k := \operatorname{Im} A_k$ und $U := \bigcup_{k=0}^{\infty} U_k$, sowie $V := \overline{U}$. Sei A die orthogonale Projektion auf den abgeschlossenen Unterraum V nach 45.18. Für $z \in U$, also $z \in U_k$ für $k \ge k_0$, gilt sofort: $A_k z = z$ für $k \ge k_0$, also $Az = \lim A_k z$. Für $z \in V$ gibt es $z_k \in U$ mit $\lim z_k = z$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann $z_k \in U_k$ angenommen werden. Weil $\|A_k z - z\| \le \|u - z\|$ für alle $u \in U_k$ gilt (vgl. 41.17.3° bzw. 43.17.3°), ist $\|A_k z - z\| \le \|z_k - z\| \longrightarrow 0$, das heißt $A_k z \longrightarrow z = Az$ für $z \in \operatorname{Im} A$. Schließlich ist für $z \in \operatorname{Ker} A$: $A_k z = 0 = Az$, also ebenfalls $A_k z \longrightarrow Az$.

(46.17) Definition (Spektralschar): Eine Abbildung $E : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(H)\,, \lambda \mapsto E_\lambda\,$, heißt *Spektralschar*, wenn

1° E_λ ist eine orthogonale Projektion für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$.
2° Es gilt $E_\lambda \leq E_\mu$, falls $\lambda \leq \mu$.
3° $\lim_{\lambda \searrow -\infty} E_\lambda = 0\,, \lim_{\lambda \nearrow \infty} E_\lambda = 1$.
4° $\lim_{\varepsilon \searrow 0} E_{\lambda+\varepsilon} = E_\lambda$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Der *Träger* $\mathrm{Tr}(E_\lambda)$ der Spektralschar (E_λ) ist das kleinste abgeschlossene Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit: $E_\lambda = 0$ oder $E_\lambda = 1$ für $\lambda \notin I$. Also:

$$I = \mathrm{Tr}(E_\lambda) = \overline{\{\lambda \in \mathbb{K} : E_\lambda \neq 0 \text{ oder } E_\lambda \neq 1\}}.$$

E_λ hat *beschränkten Träger*, wenn dieses Intervall beschränkt ist.

Man beachte, dass für jede aufsteigende oder absteigende Folge reeller Zahlen (λ_k) die Folge (E_{λ_k}) eine monotone Folge von orthogonalen Projektionen ist, auf die der Satz 46.16 anwendbar ist. In diesem Sinne sind 3° und 4° zu verstehen.

(46.18) Beispiele:

1° Die einfachste Spektralschar: Es sei $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Setze $E_\lambda = 0$ für $\lambda < \lambda_1$ und $E_\lambda = 1$ für $\lambda \geq \lambda_1$. E_λ ist dann eine Spektralschar.

2° Ein Schritt komplizierter: Sei P eine orthogonale Projektion auf dem Hilbertraum, und seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Setze

$$\begin{array}{lcll} E_\lambda & = & 0 & \text{für } \lambda \in \,]-\infty, \lambda_1[\,, \\ E_\lambda & = & P & \text{für } \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2[\,, \\ E_\lambda & = & \mathrm{id}_H = 1 & \text{für } \lambda \in [\lambda_2, \infty[\,. \end{array}$$

E_λ ist dann eine Spektralschar.

3° Nach dem Spektralsatz für einen selbstadjungierten Operator A auf einem endlichdimensionalem Hilbertraum H (42.7 und 42.8.2° bzw. 44.7 und 44.8.2°) gibt es die Menge der Eigenwerte $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\} \subset \mathbb{R}$ mit $\lambda_j < \lambda_{j+1}$ und orthogonale Projektionen $P_j : H \to H$ auf die Eigenräume $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda_j) \subset H$. Es gilt dann $\mathrm{Im}\, P_j \cap \mathrm{Im}\, P_i = 0$ für $i \neq j$ oder $P_j \circ P_i = 0$ und $id_H = \sum_{j=0}^k P_j$ sowie $A = \sum_{j=0}^k \lambda_j P_j$. Diese orthogonalen Projektionen legen eine Spektralschar fest durch

$$E_\lambda = \sum_{j \in M(\lambda)} P_j\,, \quad \text{wobei} \quad M(\lambda) := \{j : \lambda_j \leq \lambda\}.$$

Also

$$\begin{array}{lcll} E_\lambda & = & 0 & \text{für } \lambda \in \,]-\infty, \lambda_1[\,, \\ E_\lambda & = & \sum_{i=1}^j P_i & \text{für } \lambda \in [\lambda_{j-1}, \lambda_j[\,,\ j = 2, \ldots, k, \\ E_\lambda & = & \mathrm{id}_H = 1 & \text{für } \lambda \in [\lambda_k, \infty[\,. \end{array}$$

4° Ganz entsprechend erhält man eine Spektralschar zu $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\} \subset \mathbb{R}$ mit $\lambda_j < \lambda_{j+1}$ und orthogonalen Projektionen $P_j : H \to H$ mit $\operatorname{Im} P_j \cap \operatorname{Im} P_i = 0, j \neq i$, und $\mathrm{id}_H = \sum_{j=1}^k P_j$ (Ohne Einschränkungen an die Dimensionen von $\operatorname{Im} P_j$ oder H): $E_\lambda = \sum_{j \in M(\lambda)} P_j$. Dieses Beispiel ist auch als Schritt von 2 (Beispiel 2°) nach k zu verstehen.

Durch $A := \sum_{j=1}^k \lambda_j P_j$ wird dann ein selbstadjungierter Operator definiert.

5° A sei kompakt und selbstadjungiert. Nach Satz 46.12 gibt es eine Folge (λ_j) von paarweise verschiedenen Eigenwerten von A und orthogonale Projektionen $P_j : H \to H$ mit endlichdimensionalem Bild $\operatorname{Im} P_j = \operatorname{Ker}(A - \lambda_j \mathrm{id}_H)$. Wir sind an dem Fall interessiert, für den es sich um eine unendliche Folge (λ_j) handelt, da der endliche Fall in den vorangehenden Beispielen enthalten ist. Dann ist (λ_j) nach 46.12 eine Nullfolge. Die Summe $P := \sum_{j=0}^\infty P_j$ ist nach 46.16 eine wohldefinierte orthogonale Projektion. (Es gilt im übrigen $\operatorname{Im} P = \overline{\operatorname{Im} A}$). Setze $Q := 1 - P$. Die zu A gehörige Spektralschar ist dann (mit $M(\lambda) := \{j : \lambda_j \leq \lambda\}$ wie bisher):

$$
\begin{aligned}
E_\lambda &= \sum_{j \in M(\lambda)} P_j\,, && \text{für } \lambda < 0,\\
E_\lambda &= \sum_{j \in M(\lambda)} P_j + Q\,, && \text{für } \lambda \geq 0.
\end{aligned}
$$

(46.19) Satz (Integration einer Spektralschar): Sei (E_λ) eine Spektralschar mit Träger in dem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Für jede stetige Funktion $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist dann durch das *Riemann–Stieltjes–Integral*

$$\int_a^b \varphi(\lambda) \langle dE_\lambda z, z \rangle\,,\ z \in H,$$

ein selbstadjungierter Operator $\varphi(A) \in \mathcal{B}(H)$ definiert, der die Gleichung

$$\langle \varphi(A) z, z \rangle = \int_a^b \varphi(\lambda) \langle dE_\lambda z, z \rangle$$

für alle $z \in H$ erfüllt. Kurz:

$$\boxed{\varphi(A) = \int_a^b \varphi(\lambda) dE_\lambda.}$$

Insbesondere ist $A := \int_a^b \lambda dE_\lambda$ (für die Identität $\varphi(\lambda) = \lambda$) selbstadjungiert, und es gilt $1 = \mathrm{id}_H = \int_a^b dE_\lambda$ (für die konstante Funktion $\varphi(\lambda) = 1$).

Beweis: Zur Definition des Integrals: Es sei $Z^\mu = \{t_1^\mu, t_2^\mu, \ldots, t_{n_\mu}^\mu\} \subset [a,b]$ eine

Zerlegung des Intervalls $[a,b]$, $a = t_0^\mu, t_k^\mu < t_{k+1}^\mu, t_{n_\mu}^\mu = b$. Es sei:

$$\begin{aligned}
M_k^\mu &:= \max\{\varphi(t) : t \in [t_{k-1}^\mu, t_k^\mu]\} &&= \varphi(S_k^\mu) \text{ mit } S_k^\mu \in [t_{k-1}^\mu, t_k^\mu] \\
m_k^\mu &:= \min\{\varphi(t) : t \in [t_{k-1}^\mu, t_k^\mu]\} &&= \varphi(s_k^\mu) \text{ mit } s_k^\mu \in [t_{k-1}^\mu, t_k^\mu] \\
O^\mu &:= \sum_{k=1}^{n_\mu} M_k^\mu (E_{t_k^\mu} - E_{t_{k-1}^\mu}) \\
U^\mu &:= \sum_{k=1}^{n_\mu} m_k^\mu (E_{t_k^\mu} - E_{t_{k-1}^\mu})
\end{aligned}$$

Die Maxima und Minima existieren, weil die Funktion φ nach Voraussetzung stetig ist. Und deshalb existieren auch die $S_k^\mu, s_k^\mu \in [t_{k-1}^\mu, t_k^\mu]$.

Für Zerlegungen $Z^\mu, Z^{\mu+1}$ mit $Z^\mu \subset Z^{\mu+1}$gilt offensichtlich $O^\mu \geq O^{\mu+1}$ sowie $U^\mu \leq U^{\mu+1}$. Daher ergeben sich für jede Zerlegungsfolge (Z^μ) von $[a,b]$ mit $Z^\mu \subset Z^{\mu+1}$ je eine monoton wachsende Folge (U^μ) und eine monoton fallende Folge (O^μ) von selbstadjungierten Operatoren mit $U^\mu \leq O^\mu$. Nach Satz 46.16 konvergieren beide Folgen gegen selbstadjungierte Operatoren U und O mit $U \leq O$. Die Zerlegungsfolge (Z^μ) möge außerdem noch $\Delta(Z^\mu) := \max\{t_k^\mu - t_{k-1}^\mu : 1 \leq k \leq n_\mu\} \longrightarrow 0$ erfüllen, dann gilt:

$$\|O^\mu - U^\mu\| \leq \max\{M_k^\mu - m_k^\mu : 1 \leq k \leq n_\mu\} =: \Delta^\mu(\varphi).$$

Denn

$$(O^\mu - U^\mu)z = \sum_{k=1}^{n_\mu} (M_k^\mu - m_k^\mu)(E_{t_k^\mu} - E_{t_{k-1}^\mu})z = \sum_{k=1}^{n_\mu} (M_k^\mu - m_k^\mu) P_k^\mu z,$$

wobei

$$P_j^\mu := E_{t_j^\mu} - E_{t_{j-1}^\mu}.$$

Wegen $1 = \sum_{k=1}^{n_\mu} P_k^\mu$ (E_λ ist Spektralschar) folgt für $z = \sum z_j = \sum P_j^\mu z$ mit $z_j \in \operatorname{Im} P_j^\mu$: $\|(O^\mu - U^\mu)z\|^2 \leq \sum (M_j^\mu - m_j^\mu)^2 \|z_j\|^2 \leq \Delta^\mu(\varphi)^2 \sum \|z_j\|^2 \leq \Delta^\mu(\varphi)^2 \|z\|^2$. Und das liefert unmittelbar die Abschätzung $\|(O^\mu - U^\mu)\| \leq \Delta^\mu(\varphi)$.

Wegen der Stetigkeit von φ gilt $\lim \Delta^\mu(\varphi) = 0$, also folgt $\lim_{\mu\to\infty} \|O^\mu - U^\mu\| = 0$. Daher gilt $O = U$ (*Oberintegral = Unterintegral*) für jede Zerlegungsfolge (Z^μ) mit $Z^\mu \subset Z^{\mu+1}$ und $\Delta(Z^\mu) \longrightarrow 0$. Dieser Grenzwert ist auch unabhängig von der speziellen Zerlegungsfolge (für zwei solche Zerlegungsfolgen gehe man über zu der gemeinsamen Verfeinerung) und wird als das Integral von $\varphi(\lambda)dE_\lambda$ definiert. Da der Grenzwert $O = U$ über den Satz 46.16 und die dort beschriebene Konvergenz gegeben ist, setzt sich das Integral zusammen aus den Riemann–Stieltjes–Integralen

$$\big\langle \varphi(A)z, z \big\rangle = \int_a^b \varphi(\lambda) \big\langle dE_\lambda z, z \big\rangle := \lim_{\Delta(Z^\mu)\to 0} \sum_{k=1}^{n_\mu} \varphi(\tau_k^\mu) \big\langle (E_{t_k^\mu} - E_{t_{k-1}^\mu})z, z \big\rangle,$$

$z \in H$, wobei $\tau_k^\mu \in [t_{k-1}^\mu, t_k^\mu]$ jeweils ein beliebiger Zwischenpunkt ist. Wegen $U^\mu \leq \sum_{k=1}^{n_\mu} \varphi(\tau_k^\mu)(E_{t_k^\mu} - E_{t_{k-1}^\mu}) \leq O^\mu$ konvergiert die Folge der „neuen“ Summen gegen das Ober- und Unterintegral $O = U$.

Riemann–Stieltjes–Integral:

Es handelt sich hier um das *Riemann–Stieltjes–Integral* von φ mit der *Gewichtsfunktion* $g(\lambda) = \langle E_\lambda z, z\rangle$. Für stetige φ und monoton wachsende (oder monoton fallende) g existiert analog zum Riemann–Integel das Riemann–Stieltjes–Integral:

$$\int_a^b \varphi(\lambda) dg(\lambda) = \lim_{\Delta(Z^\mu)\to 0} \sum_{k=1}^{n_\mu} \varphi(\tau_k^\mu)(g(t_k^\mu) - g(t_{k-1}^\mu)).$$

Damit ist $\varphi(A)$ wohldefinierter selbstadjungierter Operator aus $\mathcal{B}(H)$.

(46.20) Satz (Spektralzerlegung für selbstadjungierte Operatoren): Zu jedem selbstadjungierten Operator $A \in \mathcal{B}(H)$ gibt es eine eindeutig bestimmte Spektralschar (E_λ) mit

$$\boxed{A = \int_{-\|A\|}^{\|A\|} \lambda dE_\lambda.}$$

Das Integral ist im Sinne der Beweisführungen zu 46.9 zu verstehen. Insbesondere wird für jedes $z \in H$ die Auswertung $\langle Az, z\rangle$ über das Riemann–Stieltjes–Integral

$$\langle Az, z\rangle = \int_{-\|A\|}^{\|A\|} \lambda \langle dE_\lambda z, z\rangle$$

gegeben. Zu A mit $\sigma(A) \subset [a, b]$ lässt sich zu $\varphi \in \mathcal{C}\,[a, b]$ der selbstadjungierte Operator $\varphi(A)$ durch

$$\varphi(A) := \int_a^b \varphi(\lambda) dE_\lambda$$

definieren. Im Falle $a \geq 0$ zum Beispiel $\sqrt[p]{A} := \int_a^b \sqrt[p]{\lambda}\, dE_\lambda$.

Der Beweis wird hier nicht geführt. Er findet sich zum Beispiel in [HS] oder [WE].

(46.21) Beispiel:
Abschließend soll hier das Beispiel eines konkreten *unbeschränkten* Operators dargestellt werden. Es handelt sich um das Beispiel des quantisierten harmonischen Oszillators. Es wird eine Realisierung von $1, Q, P, \mathcal{H}$ („Ort"„Impuls", „Energie") als Operatoren auf einem Hilbertraum H gesucht, für die gilt ($[A, B]$ ist der *Kommutator* $[A, B] = A \circ B - B \circ A$ von Operatoren):

$$[Q, P] = i1\,,\ [\mathcal{H}, Q] = -iP\,,\ [\mathcal{H}, P] = iQ,$$

sowie $\mathcal{H} = \frac{1}{2}(Q^2 + P^2)$.

Wir setzen für $H = \ell_2$:

$$\mathcal{H}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (k + \frac{1}{2}) z_k e_k$$

für $z \in D(\mathcal{H})$, wobei $D(\mathcal{H}) := \{z \in \ell_2 : \sum k^2 |z_k|^2 < \infty\}$. $\mathcal{H}$ ist linear auf dem linearen Teilraum $D(\mathcal{H})$, und ist nicht beschränkt: $\|\mathcal{H}(e_k)\| \geq k$. Mit dem Ansatz $Z := Q + iP$ (ohne dass Q, P bereits definiert sind) werden Z und $Z^\star := Q - iP$ entsprechend realisiert durch

$$Z(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{2k}\, z_k e_{k-1}$$

und

$$Z^\star(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{2k+2}\, z_k e_{k+1},$$

jeweils für $z \in D(Z) = D(Z^\star) := \{z \in \ell_2 : \sum k |z_k| < \infty\}$. Z und $Z^\star$ sind linear auf $D(Z)$ und unbeschränkt. $Z^\star$ ist „adjungiert“ zu Z, und $\mathcal{H}$ ist „selbstadjungiert“. (Das soll hier nicht definiert werden, es ist jedenfalls mehr als einfach $\big\langle \mathcal{H}(z), w \big\rangle = \big\langle z, \mathcal{H}(w) \big\rangle$ für z, w aus dem jeweiligen Definitionsbereich! Vgl. [HS], [WE].)

Man sieht: $ZZ^\star = 2\mathcal{H} + 1, Z^\star Z = 2\mathcal{H} - 1$. Mit den Definitionen $Q := \frac{1}{2}(Z + Z^\star)$ und $P := \frac{1}{2i}(Z - Z^\star)$ lassen sich damit die gewünschten Kommutatorgleichungen zeigen.

Der Sinn dieses Beispiels: Aufzeigen eines natürlichen unbeschränkten Operators, der bereits in „Diagonalform“ gegeben ist, und daher „selbstadjungiert“. Im übrigen kann man die Darstellung von $\mathcal{H}$ aus den Kommutatorrelationen rein algebraisch herleiten.

Literatur zu Linearen Operatoren auf Hilberträumen:

[HS] Hirzebruch – Scharlau: Einführung in die Funktionalanalysis. BI, 1970.
[WE] Weidmann: Lineare Operatoren im Hilbertraum. Teubner, 1975.