D. Spektralzerlegung von kompakten selbstadjungierten Operatoren

Im folgenden steht $\mathbb{K}$ für den Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, und H ist ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$.

(46.10) Definition: Ein beschränkter Operator $A : H \to H$ ist genau dann *kompakt*, wenn $\overline{A(B(0,1))}$ kompakt ist.

Also ist A kompakt, wenn es zu jeder beschränkten Folge (z_n) aus H (d.h. $\sup\{\|z_n\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$) eine Teilfolge (z_{n_k}) gibt, für die die Bildfolge (Az_{n_k}) konvergiert.

Man kann zeigen, dass eine lineare Abbildung $A : H \to H$, für die $\overline{A(B(0,1))}$ kompakt ist, bereits beschränkt ist.

(46.11) Beispiele:

1° Jeder Operator $A \in \mathcal{B}(H)$ ist im Falle $\dim H < \infty$ kompakt, denn A ist zunächst stetig, also beschränkt, daher ist $A(B(0,1)) \in H$ beschränkt, und daher $\overline{A(B(0,1))}$ kompakt nach dem Satz von Heine-Borel (H ist ja isometrisch isomorph zu einem $\mathbb{K}^n$).

Ebenso ist ein stetiger linearer Operator $A : H \to H$ kompakt, wenn der Bildraum $\operatorname{Im} A$ in H endlichdimensional ist („*finite rank operator*"). Es gilt: Diese Operatoren liegen dicht im Raum aller kompakten Operatoren. Zu jedem kompakten Operator A gibt es eine Folge von Operatoren F_n mit endlichdimensionalem Bild, mit $\|F_n - A\| \longrightarrow 0$, die also gegen A in der Norm konvergiert.

2° Ein wie oben in 46.8.5° definierter Integraloperator $K : H \to H$ ist kompakt (und selbstadjungiert, wenn der Kern $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$ erfüllt).

3° Der durch $T : \ell_2 \to \ell_2, T(e_k) := \frac{1}{k+1} e_{k+1}$ definierte Operator, also $Tz = \sum_{k=0}^{\infty} {<}e_k, z{>} \frac{1}{k+1} c_{k+1}$ ist kompakt. T hat keinen Eigenwert. T ist nicht selbstadjungiert.

4° $\mathrm{id}_H : H \to H$ ist im unendlichdimensionalen Fall nicht kompakt. Also gilt: $\dim H < \infty \Longleftrightarrow \mathrm{id}_H : H \to H$ ist kompakt.

(46.12) Spektralsatz für kompakte Operatoren: $A \in \mathcal{B}(H)$ sei kompakt und selbstadjungiert. Dann gibt es ein ONS $(c_k)_{k \geq 0}$ aus Eigenvektoren zu Eigenwerten $\lambda_k, k \geq 0 \in \mathbb{R}$, so dass für alle $z \in H$:

$$\boxed{Az = \sum_{k \geq 0}^{M} \lambda_k {<}c_k, z{>} c_k,}$$

wobei $M \in \mathbb{N}$ oder $M = \mathbb{N}$, je nachdem, ob das ONS (c_k) endlich oder unendlich ist.

Zu jedem Eigenwert λ_k ist der Eigenraum $\operatorname{Ker}(A - \lambda_k \mathrm{id}_H)$ endlichdimensional, d.h. jedes λ_j tritt in der Folge (λ_k) nur endlich oft auf.

Die Folge (λ_k) hat keinen Häufungspunkt oder sie häuft sich höchstens gegen 0.

Der Beweis verläuft ähnlich wie im Endlichdimensionalen (vgl. 42.7 bzw. 44.7): Zunächst wird mit Hilfe der Kompaktheit des Operators gezeigt, dass $\|A\|$ oder $-\|A\|$ ein Eigenwert von A ist, den wir λ_0 nennen. Dazu wähle man einen Eigenvektor c_0 der Norm 1. Man wiederhole die Prozedur für die Restriktion von A auf das Komplement $H_0 := {c_0}^{\perp}$ (es gilt $A(H_0) \subset H_0$) und erhält einen Eigenwert λ_1 mit $|\lambda_1| \leq |\lambda_0|$ und einen zugehörigen normierten Eigenvektor c_1, der automatisch orthogonal zu c_0 ist. Hat man auf diese Weise Eigenwerte $(\lambda_k)_{0\leq n}$ und ein ONS von zugehörigen Eigenvektoren $(c_k)_{0\leq n}$ gefunden, so betrachtet man wieder die Restriktion von A auf $\operatorname{span}\{c_0, c_1, \ldots, c_n\}^{\perp}$ um entsprechend λ_{n+1} und c_{n+1} zu erhalten. Die restlichen Behauptungen folgen dann direkt, teilweise unter Ausnutzung der Kompaktheit des Operators.

(46.13) Bemerkungen zum Spektrum eines Operators: Sei $A \in (H)$.

1° Das *Spektrum* von A ist nach Definition die Teilmenge

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{K} : A - \lambda \mathrm{id}_H \text{ ist nicht invertierbar } \}$$

von $\mathbb{K}$.

2° Jeder Eigenwert λ von A liegt im Spektrum von A. Umgekehrt ist das nur für $\dim H < \infty$ richtig: Dann gilt also $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$.

Im unendlichdimensionalen Fall hat man für jede Hilbertbasis ONB (c_k) z.B. den Shift $S : H \to H, e_k \mapsto e_{k+1}$. S hat die Norm 1, ist offensichtlich injektiv, also ist 0 nicht Eigenwert, aber S ist nicht surjektiv, daher nicht invertierbar. Also $0 \in \sigma(S)$ aber 0 ist nicht Eigenwert.

3° Das Spektrum eines beschränkten Operators ist abgeschlossen und beschränkt ($\sigma(A) \subset \{w \in \mathbb{C} : \|w\| \leq \|A\|\}$), also kompakt

4° Ist A kompakt, so gilt: $\sigma(A) \subset \{0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ Eigenwert von } A\}$. Denn für kompakte Operatoren B hat die „Störung“ $R := \mathrm{id}_H + B$ der Identität id_H die folgende Eigenschaft: $\dim \operatorname{Ker} R = \dim(\operatorname{Im} R)^{\perp} < \infty$. Angewandt auf $B = -\frac{1}{\lambda}A$ für kompakte A und $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$ ergibt sich für $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$: $\lambda \in \sigma(A) \iff \lambda$ ist Eigenwert von A.

Die Rolle der 0 wird in 7° weiter unten beschrieben.

Der Spezialfall des Operators T aus 46.11.3° ist ohne Eigenwert, und das Spektrum von T ist $\{0\}$. (T ist kompakt aber nicht selbstadjungiert.)

5° Auf dem Funktionenraum $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ der stetigen Funktionen $\varphi : I \to \mathbb{K}$ auf dem kompakten Intervall $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ sei $Q\varphi(x) := x\varphi(x)$ für $\varphi \in \mathcal{C}, x \in I$. Dann ist $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ wohldefiniert und linear. Bezüglich des hermiteschen Skalarprodukts $<\varphi, \psi> = \int_I \overline{\varphi(x)}\psi(x)dx$ (vgl. 43.2) ist Q beschränkt durch $\|Q\| \leq C = b - a$. Es gilt stets:

$$<Q\varphi, \psi> = \int_I \overline{x\varphi(x)}\psi(x)dx = \int_I \overline{\varphi(x)}x\psi(x)dx = <\varphi, Q\psi>,$$

also ist Q selbstadjungiert. Für $\lambda \in \mathbb{K}$ ist die Gleichung $Q\psi = \lambda\psi$ ohne Lösung in $\mathcal{C}\backslash\{0\}$, daher hat Q keinen Eigenwert. Also: $Q-\lambda\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ ist immer injektiv, $Q-\lambda\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ ist genau dann surjektiv, wenn $\lambda \notin [a,b]$. Also gilt $\sigma(Q) = [a,b]$. Achtung: Wir haben hier nicht in der Vervollständigung $H = \hat{\mathcal{C}}$ von $\mathcal{C}$ gerechnet, die Resultate bleiben aber richtig: Erst muss Q auf H eindeutig fortgesetzt werden, die Fortsetzung ist beschränkt und selbstadjungiert, sie hat keinen Eigenwert, und das Spektrum ist das Intervall $[a,b]$.

6° Auf $\mathcal{C}_2(\mathbb{R},\mathbb{K})$ ist die Multiplikation mit x als Operator Q, $\varphi \mapsto x\varphi$, nicht überall definiert als ein beschränkter Operator: $Q\varphi$ gibt nur für die $\varphi \in \mathcal{C}_2$ eine Funktion aus $\mathcal{C}_2$, die die Bedingung $\int_{\mathbb{R}} |x\varphi(x)|^2\,dx < \infty$ erfüllen. Und es gibt $\psi_n \in \mathcal{C}_2$ mit $\|\psi_n\| \leq 1$ sowie $\int_{\mathbb{R}} |x\psi_n(x)|^2\,dx < \infty$ und $\|Q\psi_n\| \geq n$.

7° Der Satz 46.12 beinhaltet auch, dass alle Eigenwerte eines selbstadjungierten kompakten Operators – abgesehen von der 0 – diskret liegen und endliche Vielfachheit haben. In der Quantenmechanik ist man oft an diesem Teil des Spektrums, dem *diskreten Spektrum* eines selbstadjungierten Operators interessiert:

$$\sigma_d(A) := \{\lambda \in \sigma_p(A) : \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda\mathrm{id}_H) < \infty \text{ und } \lambda \text{ liegt isoliert in } \sigma(A)\},$$

wobei $\sigma_p(A)$ das *Punktspektrum* ist:

$$\sigma_p(A) := \{\lambda \in \sigma(A) : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}.$$

Im übrigen kann man zeigen (siehe auch 4°), dass für jeden kompakten Operator A das diskrete Spektrum mit dem Spektrum $\sigma(A)$ übereinstimmt mit der möglichen Ausnahme von 0. Genauer:

Im Falle $\dim H < \infty$ gilt $\sigma(A) = \sigma_d(A) = \sigma_p(A)$.

Im unendlichdimensionalen Fall gilt für kompakte A stets:

$$0 \notin \sigma_d(A) \text{ und } \sigma(A) = \{0\} \cup \sigma_d(A).$$

Denn 0 muss im Spektrum liegen, sonst hätte man für ein unendliches ONS (c_k) Elemente $x_k \in H$ mit $Ax_k = c_k$ und $\|x_k\| = \|A^{-1}(e_k)\| \leq \|A^{-1}\|\,\|e_k\| \leq \|A^{-1}\|$. (x_k) wäre also eine beschränkte Folge, für die die Bildfolge (e_k) keinen Häufungspunkt hat im Widerspruch zur Kompaktheit von A. Also gilt $0 \in \sigma(A)$. Wenn die Eigenwerte von A sich in 0 nicht häufen, dann hat A endlichdimensionales Bild, der Kern ist also unendlichdimensional, daher $0 \notin \sigma_d(A)$. Wenn sie sich dort häufen gilt $0 \notin \sigma_d(A)$ nach Definition von $\sigma_d(A)$.