§43 Unitäre Vektorräume

Zusammenfassung

In diesem Paragrafen werden die gleichen Themen wie in § 41 abgehandelt, jetzt allerdings für den komplexen Fall. Die Aussagen entsprechen sich weitgehend, daher wurde auch die Nummerierung übernommen.

Alle Vektorräume in diesem Paragrafen sind Vektorräume über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

A. Der Begriff des hermiteschen Skalarproduktes und Beispiele

(43.1) Definition: Ein *hermitesches Skalarprodukt* auf dem Vektorraum V ist eine Abbildung $\sigma : V \times V \to \mathbb{C}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1° Für alle $v \in V$ ist $\sigma(v, \;) : V \to \mathbb{C}, w \mapsto \sigma(v, w)$, eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung.
2° σ erfüllt $\sigma(v, w) = \overline{\sigma(w, v)}$ für alle $v, w \in V$.
3° σ ist *positiv definit*, i.e. $\sigma(v, v) > 0$ für alle $v \in V$.

Ein hermitesches Skalarprodukt σ ist dann auch $\mathbb{R}$-linear im ersten Argument, d.h. $\sigma(\;, w) : V \to \mathbb{C}$ ist $\mathbb{R}$-linear für alle $w \in V$. Außerdem gilt für komplexe Skalare $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\sigma(\lambda v, w) = \bar{\lambda}\sigma(v, w).$$

Also ist $\sigma(\;, w)$ semilinear.

σ mit $1°, 2°$ wird auch *hermitesche Form* genannt.

Die Bedingung $\sigma(v, w) = \overline{\sigma(w, v)}$ impliziert im übrigen, dass $\sigma(v, v)$ stets reell ist. Für eine hermitesche Form σ ist $\sigma(v, v)$ also immer reellwertig.

Statt σ wird wieder meistens $< \, , \, >$ geschrieben, oder auch $(\; , \;)$, und besonders beliebt in der Quantenmechanik: $< \, | \, >$. Ein *unitärer Vektorraum* ist ein Paar $(V, < \, , \, >)$ mit: V ist komplexer Vektorraum und $< \, , \, >$ ein hermitesches Skalarprodukt.

(43.2) Beispiele:

1° Das Standard-Skalarprodukt auf dem $\mathbb{C}^n$ ist das hermitesche Skalarprodukt:

$$<z, w> = \sum_{i=1}^{n} \bar{z}^i w^i$$

für Spaltenvektoren $z, w \in \mathbb{C}^n$. Ebenso:

$$<z, w> = \bar{z}^\top w$$

2° Auf einem n-dimensionalem $\mathbb{C}$-Vektorraum gilt allgemeiner: Ein hermitesches Skalarprodukt ist bezüglich einer beliebigen Basis $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ von V gegeben als

$$<z, w> = g_{\mu\nu}\bar{z}^\mu w^\nu$$

mit einer Matrix $(g_{\mu\nu}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, die hermitesch und positiv definit ist. Dabei heißt eine Matrix $g = (g_{\mu\nu})$ *hermitesch*, wenn stets $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\nu\mu}$ gilt, d.h. mit $g^\star := \bar{g}^\top$: g hermitesch $\Leftrightarrow$ $g = g^\star$.

Aus 25.7 oder analog zu 25.7 lässt sich zeigen (vgl. auch das Orthonormierungsverfahren in 43.7): Zu jedem hermiteschen Skalarprodukt $< \, , >$ auf einem n-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum gibt es eine Basis $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ mit

$$<z^\mu c_\mu, w^\nu c_\nu> = \sum_{i=1}^{n} \bar{z}^i w^i,$$

also $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. Eine solche Basis heißt *Orthonormalbasis* bezüglich $< \, , >$.

3° Der Raum

$$\ell_2 := \ell_2(\mathbb{C}) := \{(z_k) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=0}^{\infty} |z_k|^2 < \infty\}$$

der *quadratsummierbaren* komplexen Zahlenfolgen mit dem hermiteschen Skalarprodukt

$$<z, w> = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{z}_k w_k$$

ist ein unendlichdimensionaler unitärer Vektorraum.

Die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \bar{z}_k w_k$ ist gewährleistet aufgrund der Abschätzung (Cauchy–Schwarz, vgl. 11.6, 41.4 und 43.4)

$$\left(\sum_{k=0}^{k=m} |z_k w_k|\right)^2 \leq \left(\sum_{k=0}^{k=m} |z_k|^2\right)\left(\sum_{k=0}^{k=m} |w_k|^2\right).$$

4° Ein verwandter Raum ist der Vektorraum $V = \mathbb{C}[T]$ der Polynome mit komplexen Koeffizienten und

$$<P, Q> = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k Q_k$$

für $P = P_k T^k$ und $Q = Q_l T^l$, $P_k, Q_l \in \mathbb{C}$, als Skalarprodukt. (Die Summation ist stets endlich, es gibt also keine Konvergenzfrage.)

Anmerkung zur Beziehung zwischen den letzten beiden Beispielen: Es gibt eine (komplex–lineare und injektive) natürliche Einbettung

$$\iota : \mathbb{C}[T] \longrightarrow \ell_2, \;\; P = P_k T^k \mapsto (P_k),$$

bei der das Skalarprodukt erhalten wird, d.h. $<\iota(P), \iota(Q)> = <P, Q>$. Solche linearen Abbildungen zwischen unitären Räumen heißen auch *isometrisch* (vgl. 45.7).

5° Für die weiteren Beispiele werden komplexwertige Funktionen benötigt. Sei M eine Menge. Jede Funktion $\varphi : M \to \mathbb{C}$, also $\varphi \in \mathbb{C}^M$, hat eine eindeutige

Darstellung $\varphi = u + iv$ mit $u, v \in \mathbb{R}^M$. Die Eigenschaften von φ entsprechen dabei weitgehend denen von u und v, wie im folgendne erläutert wird.

Zum Beispiel gilt wegen $|u(x)| \leq |\varphi(x)| \leq |u(x)| + |v(x)|$ für jedes $x \in M$: φ ist genau dann beschränkt (i.e. $\sup_{x\in M} |\varphi(x)| < \infty$), wenn u und v beide beschränkt sind.

Weiterhin: Eine komplexe Zahlenfolge (z_k) mit $z_k = x_k + iy_k$, $x_k, y_k \in \mathbb{R}$, konvergiert genau dann, wenn (x_k) und (y_k) konvergieren, und dann ist

$$\lim_{k\to\infty} z_k = \lim_{k\to\infty} x_k + i \lim_{k\to\infty} y_k.$$

Im Falle einer offenen Menge $M = \Omega \subset \mathbb{R}^n$ gilt deshalb: $\varphi = u + iv$ ist genau dann stetig, wenn u und v stetig sind.

Im Falle $n = 1$, also $\Omega \subset \mathbb{R}$ ist $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ definitionsgemäß differenzierbar im Punkte $x \in \Omega$, wenn der Grenzwert $\varphi'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\varphi(x+h) - \varphi(x))$ existiert. Es gilt: φ ist genau dann in $x \in \Omega$ differenzierbar, wenn das für u und v zutrifft.

Für $n \geq 1$ hat man entsprechende Äquivalenzen für partielle Differenzierbarkeit in jeder Ordnung.

Wichtig für die Quantenmechanik ist der unitäre Vektorraum $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ der komplexwertigen *Schwartzschen Testfunktionen*:

$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}} := \{\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) : \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha|\, |\partial^\beta \phi(x)| < \infty\},$$

wobei für die Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ gilt

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad \text{für} \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

und

$$\partial^\beta \phi(x) := \frac{\partial^{\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_n}}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \dots \partial x_n^{\beta_n}} \phi(x).$$

Es ist leicht zu sehen, dass $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist. Für eine komplexwertige Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mit $\varphi = u + iv$, $u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt aufgrund der vorangehenden Überlegungen ($\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ steht für $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$):

$$\varphi \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}} \quad \Longleftrightarrow \quad u \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}} \quad \text{und} \quad v \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}.$$

Daher hat man eine natürliche Bijektion: $\mathcal{S}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{S}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{S}_{\mathbb{R}}\,, \quad \varphi = u + iv \mapsto (u, v)$. Man identifiziert diese beiden Räume gelegentlich und schreibt auch $\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \mathcal{S}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ oder $\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \mathcal{S}_{\mathbb{R}} \oplus i\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$. Die letzte Notation entspricht der allgemeinen *Komplexifizierung* eines reellen Vektorraumes W: Das ist der reelle Vektorraum $Z = W \times W$, in dem die Paare (x, y), $x, y \in W$, zunächst einfach $x + iy$ geschrieben werden. Mit der zusätzlichen Definition $i(x + iy) := -y + ix$ für $x, y \in W$ wird Z zu einem komplexen Vektorraum, in dem jeder Vektor $z \in Z$ die eindeutige Zerlegung $z = x + iy$ mit $x \in W \cong W \times 0$ und $y \in W \cong 0 \times W$ hat. Daher die Notation $W \oplus iW$.

Das Skalarprodukt benötigt nun die Integration von komplexwertigen Funktionen:

$$<\varphi, \psi> := \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\varphi}(x)\psi(x)dx.$$

Dabei ist $\int_D (u(x)+iv(x))dx := \int_D u(x)dx + i\int_D v(x)dx$ für reellwertige Funktionen u und v. Wie im Paragrafen 41 handelt es sich bei $\int_{\mathbb{R}^n}$ um das uneigentliches Integral (vgl. die Box in 41.2.5°), dessen Existenz aufgrund der starken Abschätzungen für Funktionen aus $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ gesichert ist.

Wie in §41 lässt sich leicht nachrechnen, dass für $\phi, \varphi, \psi \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ stets gilt:

$$\begin{aligned} <\phi+\varphi,\psi> &= <\phi,\psi> + <\varphi,\psi>,\\ <\lambda\phi,\psi> &= \bar{\lambda}<\phi,\psi>,\\ <\phi,\psi> &= \overline{<\psi,\phi>}. \end{aligned}$$

Außerdem ist $<\ ,\ >$ hermitesche Form und wie zuvor auch positiv definit.

6° Ähnlich wichtig für die Quantenmechanik ist der Vektorraum

$$\mathcal{C}_2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) := \{\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) : \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2\,dx < \infty\}.$$

$\mathcal{C}_2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ ist ebenfalls ein unendlichdimensionaler Vektorraum (es gilt im übrigen $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) \subset \mathcal{C}_2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$).

Es ist

$$<\varphi,\psi> := \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\varphi}(x)\psi(x)dx$$

für $\varphi,\psi \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ wohldefiniert und liefert wie in 5° ein hermitesches Skalarprodukt.

7° Schließlich ist für ein kompaktes Intervall $I \in \mathbb{R}$ der Raum $\mathcal{C}(I,\mathbb{C})$ der stetigen, komplexwertigen Funktionen ein unendlichdimensionaler, unitärer Vektorraum mit

$$<\varphi,\psi> := \int_I \bar{\varphi}(x)\psi(x)dx,\ \ \varphi,\psi \in \mathcal{C}(I,\mathbb{C})$$

als hermitesches Skalarprodukt.

Die letzten beiden Beispiele lassen sich wieder verallgemeinern auf $\mathcal{C}_2(\Omega,\mathbb{C})$ für offene Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und auf $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$ für kompakte Mengen $K \subset \mathbb{R}^n$.

B. Ein unitärer Vektorraum ist normiert.

(43.3) Lemma: Es sei der unitäre Vektorraum $(V,<\ ,\ >)$ mit einem hermiteschen Skalarprodukt $<\ ,\ >: V \times V \to \mathbb{C}$ gegeben. Dann wird durch

$$\|v\| := \sqrt[2]{<v,v>}, \quad v \in V,$$

eine Norm auf V definiert, das heißt:

1° $\|v\| \geq 0$ und ($\|v\| = 0 \iff v = 0$) für $v \in V$.
2° $\|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|$ für $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.

3° $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$.

Das wird wie in 11.5 bewiesen. Diese Norm wird als die *unitäre Norm* bezeichnet. Gelegentlich wird die unitäre Norm einfach als Betrag geschrieben (zum Beispiel im Falle $V = \mathbb{C}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt, vgl. 41.2.1°).

Wesentlich für den Beweis der Dreiecksungleichung 41.3.3° (vgl. 11.6) sind dabei die:

(43.4) Cauchy–Schwarz–Ungleichungen: Für alle $v, w \in V$ gilt

$$|{<}v, w{>}| \leq \|v\| \, \|w\| \, .$$

Mit Hilfe der euklidischen Norm wird auf einem euklidischen Raum $(V, < \, , >)$ eine Topologie definiert. Daher spielen Konvergenz- und Stetigkeitseigenschaften eine wichtige Rolle, zumindestens im Falle $\dim V = \infty$. Darauf werden wir in den Paragraf 45 und 46 eingehen.

C. Orthogonalität und Orthonormalisierung

(43.5) Definition: $(V, < \, , >)$ sei ein unitärer Vektorraum.

1° Zwei Vektoren $a, b \in V$ heißen *orthogonal (zueinander)*, in Zeichen $a \perp b$, wenn ${<}a, b{>} = 0$ gilt. Man sagt auch, dass a auf b *senkrecht* steht, oder b auf a. Zwei Mengen $A, B \subset V$ heißen *orthogonal (zueinander)*, in Zeichen $A \perp B$, wenn alle $a \in A$ auf allen $b \in B$ senkrecht stehen, d.h. wenn für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ stets ${<}a, b{>} = 0$ gilt.

2° Für $A \subset V$ heißt

$$A^{\perp} := \{v \in V : {<}v, a{>} = 0 \text{ für alle } a \in A\}$$

das *orthogonale Komplement*.

3° Eine Teilmenge $B \subset V$ heißt *Orthonormalsystem*, kurz *ONS*, wenn die Vektoren $v \in B$ alle die Länge 1 haben, $\|v\| = 1$, und wenn sie paarweise orthogonal zueinander sind, d.h. wenn ${<}v, w{>} = 0$ für alle $v, w \in B$ mit $v \neq w$ gilt. Kurz: ${<}v, w{>} = \delta_{vw}$.

(43.6) Bemerkungen:

1° $A^{\perp}$ ist Untervektorraum von V und es gilt: $A \cap A^{\perp} = 0$.

2° Ein ONS ist stets linear unabhängig. Im endlichen Fall wird auch $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ geschrieben und im abzählbaren Fall wird B oft als Folge $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ aufgefasst, jeweils mit paarweise verschiedenen Folgengliedern.

(43.7) Satz (Orthonormalisierung nach E. Schmidt): Es sei $(b_j)_{j \geq 1}$ eine linear unabhängige Folge im unitären Vektorraum $(V, < \, , >)$ (endlich oder unendlich). Dann liefert die rekursive Definition:

$$\begin{aligned} c_1 &:= \frac{b_1}{\|b_1\|} \\ c_{j+1} &:= \frac{b_{j+1} - \sum_{i=1}^{i=j} {<}c_i, b_{j+1}{>} c_i}{\left\| b_{j+1} - \sum_{i=1}^{i=j} {<}c_i, b_{j+1}{>} c_i \right\|} \end{aligned}$$

ein Orthogonalsystem (c_j) mit $\mathrm{span}\{b_j : j \geq 1\} = \mathrm{span}\{c_j : j \geq 1\}$.

Beweis: Durch Induktion nach j wird die folgende Aussage bewiesen: $(c_1, c_2, \ldots, c_j)$ ist ein ONS und es gilt $\mathrm{span}\{c_i : i \in \mathbb{N}\,, i \leq j\} = \mathrm{span}\{b_j : j \in \mathbb{N}\,, i \leq j\}$.

Der Fall $j = 1$ ist klar. Der Induktionsschritt $j \longrightarrow j+1$ ergibt sich folgendermaßen:

Wegen $b_{j+1} \notin \mathrm{span}\{b_i : i \in \mathbb{N}\,, i \leq j\} = \mathrm{span}\{c_j : j \in \mathbb{N}\,, i \leq j\}$ gilt erst einmal

$$b_{j+1} - \sum_{i=1}^{i=j} <c_i, b_{j+1}> c_i \neq 0\,,$$

deshalb ist c_{j+1} wohldefiniert. $\|c_{j+1}\| = 1$ ist klar und $<c_{j+1}, c_k> = 0$ für $k \leq j$ sieht man durch Einsetzen:

$$<b_{j+1} - \sum_{i=1}^{i=j} <c_i, b_{j+1}> c_i, c_k> = <b_{j+1}, c_k> - \sum_{i=1}^{i=j} \overline{<c_i, b_{j+1}>} <c_i, c_k>,$$

daher

$$<b_{j+1} - \sum_{i=1}^{i=j} <c_i, b_{j+1}> c_i, c_k> = <b_{j+1}, c_k> - \sum_{i=1}^{i=j} <b_{j+1}, c_i><c_i, c_k> = 0$$

wegen $<c_i, c_k> = \delta_{ik}$.

Nach Konstruktion gilt $c_{j+1} \in \mathrm{span}\{b_1, b_2, \ldots, b_{j+1}\}$ und die Definitionsgleichung von c_{j+1} zeigt $b_{j+1} \in \mathrm{span}\{c_1, c_2, \ldots, c_{j+1}\}$, also

$$\mathrm{span}\{c_i : i \in \mathbb{N}\,, i \leq j+1\} = \mathrm{span}\{b_j : j \in \mathbb{N}\,, i \leq j+1\}.$$

(43.8) Bemerkungen:

1° Sei $\dim V < \infty$. Dann ist eine Orthonormalbasis (ONB) nichts anderes als ein Orthonormalsystem, das zugleich ein Erzeugendensystem ist.

2° Jeder n-dimensionale unitäre Raum hat eine Orthonormalbasis, wie wir bereits in 41.2.2° wiederholt haben. Die Existenz ergibt sich aber auch aus dem Orthonormierungsverfahren. Für eine konkrete ONB $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ hat jeder Vektor $v \in V$ die Entwicklung

$$\boxed{v = \sum_{i=1}^{i=n} <b_i, v> b_i.}$$

3° Ein Analogon für den Begriff einer Orthonormalbasis (ONB) und für solche „Entwicklungen“ im Falle unendlichdimensionaler Räume wird in Paragraf 45 behandelt: Das „vollständige ONS“, bzw. die „Hilbertraumbasis“.

D. Unitäre Abbildungen

Analog zum Begriff der orthogonalen Abbildung euklidischer Räume haben wir nun:

(43.9) Definition: Im Falle eines unitären Raumes $(V, < \, , \, >)$ heißt eine lineare Abbildung $f \in \mathrm{Hom}(V, V)$ *unitär*, wenn für alle $v, w \in V$ stets $<v, w> = <f(v), f(w)>$ gilt (wenn also f isometrisch ist), und wenn f surjektiv ist. [**Achtung:** Die Surjektivitätsforderung wurde in der Vorlesung vergessen!]

Entsprechend heißt eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *unitär*, wenn A bezüglich des Standard-Skalarprodukts auf $\mathbb{C}^n$ unitär ist, d.h. wenn für alle Spaltenvektoren $z, w \in \mathbb{C}^n$ stets $<z, w> = <Az, Aw>$, also

$$\bar{z}^\top w = \overline{(Az)}^\top Aw = \bar{z}^\top \bar{A}^\top Aw$$

gilt.

Eine unitäre Abbildung f ist also stets bijektiv, denn die Isometrie zieht Injektivität nach sich, also ist f ein isometrischer Vektorraumisomorphismus (so kann man „unitär" definieren). Die Umkehrabbildung f^{-1} ist dann wieder unitär. Im Falle $\dim V < \infty$ folgt die Surjektivität im übrigen bereits aus der Injektivität, also aus der Bedingung $<v, w> = <f(v), f(w)>$ für alle $v, w \in V$. Daher muss die Surjektivität bei den unitären Matrizen nicht extra gefordert werden.

(43.10) Bemerkung: Für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1° A ist unitär.
2° Die Spaltenvektoren von A bilden eine ONB (ein ONS).
3° Die Zeilenvektoren von A bilden eine ONB (ein ONS).
4° Es gilt $\bar{A}^\top A = E_n$ für die $n \times n$–Einheitsmatrix $E_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Insbesondere gilt für unitäre Matrizen A: Neben $\bar{A}^\top A = E_n$ gilt auch $A\bar{A}^\top = E_n$. A ist daher invertierbar mit der Inversen $A^{-1} = \bar{A}^\top$.

Und es folgt für Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, deren Koeffizienten alle reell sind: A ist genau dann unitär, wenn A als reelle Matrix orthogonal ist.

(43.11) Definition: $\mathrm{U}(n)$ bezeichnet die Menge aller unitären Matrizen aus $\mathbb{C}^{n\times n}$.

(43.12) Satz:

1° $\mathrm{U}(n)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, und es gilt für alle $R \in \mathrm{U}(n)$ stets $|\det R| = 1$. $\mathrm{U}(n)$ ist die *unitäre Gruppe.*

2° $\mathrm{SU}(n) := \{A \in \mathrm{U}(n) : \det A = 1\}$ ist Untergruppe von $\mathrm{U}(n)$. $\mathrm{SU}(n)$ ist die *spezielle unitäre Gruppe.*

3° $(V, < \, , \, >)$ sei n–dimensionaler unitärer Raum und $f \in \mathrm{Hom}(V, V)$ eine lineare Abbildung. Dann ist f genau dann unitär, wenn die darstellende Matrix bezüglich einer ONB unitär ist.

4° $(V, < \, , \, >)$ sei wieder ein n–dimensionaler unitärer Raum. Die Gesamtheit aller Orthonormalbasen von V wird in folgender Weise durch die Gruppe $\mathrm{U}(n)$ parametrisiert. Sei $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ eine ONB. Dann gilt:

Jede ONB $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ definiert durch $c_j = A_j^\nu b_\nu$ eine Matrix $A = (A_i^\nu) \in \mathrm{U}(n)$. Jede Matrix $A = (A_i^\nu) \in \mathrm{U}(n)$ liefert durch $c_j := A_j^\nu b_\nu$ eine ONB $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

E. Orthogonale Projektion

Analog zu 41.13 haben wir:

(43.13) Satz: U sei ein endlichdimensionaler Untervektorraum des unitären Vektorraumes $(V, < \, , \, >)$. Dann gilt $V = U \oplus U^\perp$.

Beweis: Nach 43.6 wissen wir bereits $U \cap U^\perp = 0$ und $U^\perp$ ist Untervektorraum. Also gilt $U + U^\perp = U \oplus U^\perp$, und es bleibt zu zeigen, dass $U + U^\perp$ der ganze Raum V ist.

Nach 43.7 bzw. 43.2.2° hat U als endlichdimensionaler unitärer Raum eine ONB $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Wir setzen für $v \in V$:

$$P(v) := \sum_{\nu=1}^{n} <b_\nu, v> b_\nu .$$

Dann gilt $P(v) \in U$ für alle $v \in V$, und $w := v - P(v)$ erfüllt

$$\begin{aligned} <w, b_j> &= <v, b_j> - <(\textstyle\sum_{\nu=1}^n \overline{<b_\nu, v> b_\nu}), b_j> \\ &= <v, b_j> - \textstyle\sum_{\nu=1}^n \overline{<b_\nu, v>} <b_\nu, b_j> \\ &= <v, b_j> - <v, b_j> \\ &= 0 \end{aligned}$$

für $j = 1, 2, \ldots, n$. Also gilt $w = v - P(v) \in U^\perp$. Insgesamt haben wir gezeigt:

$$v = P(v) + (v - P(v)) \quad \text{mit} \quad P(v) \in U \, , \; v - P(v) \in U^\perp,$$

also $v \in U + U^\perp$.

(43.14) Gegenbeispiel: In $\ell_2(\mathbb{C})$ ist $U := \mathrm{span}\{e_k : \mathbb{N}\}$ der Untervektorraum der endlichen, komplexen Linearkombinationen von „Einheitsvektoren“ $e_k = (\delta_{kj})$. Es ist $U^\perp = 0$, denn für $z = (z_k) \in \ell_2$ mit $<e_k, z> = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $z = 0$ wegen $<e_k, z> = z_k$.

(43.15) Definition: $P : V \to V$ sei linear.

1° P heißt *Projektion*, wenn $P \circ P = P$.

2° Eine Projektion P heißt *orthogonale Projektion* (bezüglich eines vorgegebenen unitären Skalarprodukts), wenn gilt: $\mathrm{Im}P \perp \mathrm{Ker}P$.

Im Beweis zu 43.13 wurde eine orthogonale Projektion P angegeben, die eine orthogonale Zerlegung festlegt: $U = \mathrm{Im}P, U^\perp = \mathrm{Ker}P$ und $V = U \oplus U^\perp$.

(43.16) Satz: Es sei $P : V \to V$ ein Homomorphismus von Vektorräumen.

1° Ist P Projektion, so gilt $\mathrm{Ker}P \oplus \mathrm{Im}P = V$.

2° Ist P eine Projektion und $(V, < \, , \, >)$ unitärer Vektorraum, so ist P genau dann orthogonal, wenn P in folgendem Sinne *selbstadjungiert* ist:

$$<P(v), w> = <v, P(w)> \quad \text{für alle} \quad v, w \in V.$$

Beweis:

1° Wegen $v = Pv + (v - Pv)$ ist $V = \mathrm{Im}P + \mathrm{Ker}P$, denn es ist $v - Pv \in \mathrm{Ker}P$: $P(v - Pv) = Pv - P(Pv) = Pv - Pv = 0$. Die Darstellung ist eindeutig, bzw. $\mathrm{Ker}P \cap \mathrm{Im}P = 0$, wegen: $v \in \mathrm{Ker}P \cap \mathrm{Im}P$ heißt $Pv = 0$ und $v = Pw$ für ein $w \in V$. Also folgt $v = Pw = PPw = Pv = 0$.

2° „$\Rightarrow$“: Aus $\mathrm{Ker}P \perp \mathrm{Im}P$ folgt: $<Pv, w> = <Pv, Pw + (w - Pw)> = <Pv, Pw>$ da $Pv \perp w - Pw$; und analog $<Pv, Pw> = <v, Pw>$.

„$\Leftarrow$“: Seien $v \in$ Ker P und $w = Pu$. Dann $<v, w> = <v, Pu> = <Pv, u> = <0, u> = 0$.

(43.17) Bemerkungen:

1° $V = U \oplus W$ ist gleichbedeutend mit: Es gibt eine Projektion P mit $U = \mathrm{Im}P$.

2° $V = U \oplus W$ und $U \perp W$ ist gleichbedeutend mit: Es gibt eine orthogonale Projektion P mit $U = \mathrm{Im}P$.

3° Für eine orthogonale Projektion P auf $U = \mathrm{Im}P$ ist $P(v)$ derjenige Vektor aus U, der v am nächsten ist:

$$\begin{aligned}
\|v - u\|^2 &= \|(v - Pv) + (Pv - u)\|^2 \\
&= <(v - Pv) + (Pv - u), (v - Pv) + (Pv - u)> \\
&= \|v - Pv\|^2 + \|Pv - u\|^2 + <v - Pv, Pv - u> + <Pv - u, v - Pv> \\
&= \|v - Pv\|^2 + \|Pv - u\|^2,
\end{aligned}$$

da $v - Pv \in U^\perp, Pv - u \in U$. Daher stets:

$$\|v - u\| \geq \|v - Pv\|.$$

(43.18) Beispiel: Im Falle der komplexen Standardebene $V = \mathbb{C}^2$ gilt:

1° Der Unterraum $U := \{(z, z)^\top : z \in \mathbb{C}\}$ hat viele Komplemente: Sei $w \in \mathbb{C}^2$ mit $w \notin U$. Dann ist $\{(1, 1)^\top, w\}$ eine Basis von $\mathbb{C}^2$, also gilt $U \oplus \mathbb{C}w = \mathbb{C}^2$.

2° Der Unterraum $U := \{(z, z)^\top : z \in \mathbb{C}\}$ hat aber genau ein **orthogonales Komplement** $W = \{(z, -z)^\top : z \in \mathbb{R}\} = U^\perp$: $U \oplus W = V$ und $U \perp W$.