§41 Euklidische Vektorräume

Zusammenfassung

In diesem Paragrafen werden die Grundbegriffe zu den euklidischen Vektorräumen wiederholt und weiterentwickelt als Vorbereitung zur Hauptachsentransformation im kommenden Paragrafen. Es werden am Anfang vor allem Beispiele von Funktionenräumen dargestellt, die in der Quantenmechanik eine Rolle spielen. Dann wird die natürliche Norm eines euklidischen Vektorraumes behandelt, und es wird auf Orthogonalität eingegangen: Orthogonalität von Vektoren zueinander, von Transformationen und von Projektionen. Im § 43 wird die Theorie noch einmal für den komplexen Fall unter Beibehaltung der Nummerierung aufgerollt.

Alle Vektorräume in diesem Paragrafen sind Vektorräume über dem Körper der reellen Zahlen.

A. Der Begriff des euklidischen Skalarproduktes und Beispiele

Wir erinnern als Erstes an den für diesen Abschnitt grundlegenden Begriff des euklidischen Skalarprodukts (vgl. 11.2):

(41.1) Definition: Ein *euklidisches Skalarprodukt* auf dem Vektorraum V ist eine Abbildung $\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1° σ ist *bilinear*, i.e. $\sigma(\ ,w) : V \to \mathbb{R}$ und $\sigma(v,\ ) : V \to \mathbb{R}$ ist jeweils linear für alle $v, w \in V$.
2° σ ist *symmetrisch*, i.e. $\sigma(v,w) = \sigma(w,v)$ für alle $v, w \in V$.
3° σ ist *positiv definit*, i.e. $\sigma(v,v) > 0$ für alle $v \in V$.

Statt σ wird meistens $<\ ,\ >$ geschrieben, oder auch $(\ ,\ )$, und besonders beliebt in der Quantenmechanik: $<\ |\ >$. Ein *euklidischer Vektorraum* ist ein Paar $(V, <\ ,\ >)$ mit: V ist reeller Vektorraum und $<\ ,\ >$ ein euklidisches Skalarprodukt.

(41.2) Beispiele:
1° Als Erstes haben wir das Standard-Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ kennengelernt:

$$<x,y> = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$$

für Spaltenvektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$.

2° Auf einem n-dimensionalem $\mathbb{R}$-Vektorraum gilt allgemeiner: Ein euklidisches Skalarprodukt ist bezüglich einer beliebigen Basis $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ von V gegeben als

$$<x,y> = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$$

mit einer Matrix $(g_{\mu\nu}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, die symmetrisch und positiv definit ist.

In 25.7 haben wir bewiesen, dass es zu jedem euklidischen Skalarprodukt $< \, , >$ auf einem n-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum eine Basis $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ gibt mit

$$<x^\mu c_\mu, y^\nu c_\nu> = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i,$$

also $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. Eine solche Basis heißt *Orthonormalbasis* bezüglich $< \, , >$.

3° Wir kennen auch den Folgenraum (vgl. 11.3) der quadratsummierbaren reellen Zahlenfolgen

$$\ell_2 := \{(x_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\}$$

mit dem euklidischen Skalarprodukt

$$<x, y> = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k.$$

Die Konvergenz dieser Reihe ist gewährleistet aufgrund der Abschätzung (Cauchy–Schwarz, vgl. 11.6 und 41.4)

$$\left(\sum_{k=0}^{k=m} |x_k y_k|\right)^2 \leq \left(\sum_{k=0}^{k=m} {x_k}^2\right)\left(\sum_{k=0}^{k=m} {y_k}^2\right).$$

4° Ein verwandter Raum ist der Vektorraum $V = \mathbb{R}[T]$ der Polynome mit reellen Koeffizienten und

$$<P, Q> = \sum_{k=0}^{\infty} P_k Q_k$$

für $P = P_k T^k$ und $Q = Q_k T^k$ als Skalarprodukt. (Die Summation ist stets endlich, es gibt also keine Konvergenzprobleme.)

Anmerkung zu der engen Beziehung zwischen den letzten beiden Beispielen: Es gibt eine (lineare und injektive) natürliche Einbettung

$$\iota : \mathbb{R}[T] \longrightarrow \ell_2, \;\; P = P_k T^k \mapsto (P_k),$$

bei der das Skalarprodukt erhalten wird, d.h. $<\iota(P), \iota(Q)> = <P, Q>$. Solche linearen Abbildungen zwischen euklidischen Räumen heißen auch *isometrisch* (vgl. 41.9 und 45.7).

5° Wichtig für die Quantenmechanik ist der euklidische Vektorraum $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ der *Schwartzschen Testfunktionen*:

$$\mathcal{S} := \{\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha| \, |\partial^\beta \phi(x)| < \infty\},$$

wobei für die Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ gilt

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \text{ für } x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

und

$$\partial^\beta \phi(x) := \frac{\partial^{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}}{\partial x_1^{\beta_1}\partial x_2^{\beta_2}\ldots\partial x_n^{\beta_n}}\phi(x).$$

Es ist leicht zu sehen, dass $\mathcal{S}$ ein Vektorraum ist. Ein typisches Element von $\mathcal{S}$ ist zum Beispiel

$$\psi(x) = \exp(-x^2) \text{ mit } x^2 := x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

An diesem Beispiel sieht man auch, dass $\mathcal{S}$ unendlichdimensional ist.

Das Skalarprodukt benötigt Integration:

$$<\varphi,\psi> := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\psi(x)dx.$$

Dabei handelt es sich um ein uneigentliches Integral auf dem $\mathbb{R}^n$. Es existiert, weil die Funktionen $\varphi,\psi \in \mathcal{S}$ sehr starke Abschätzungen erlauben, z.B.

$$|\varphi(x)\psi(x)| \leq (x^2)^{-n}.$$

Wir wollen den Existenzbeweis hier nicht durchführen, das gehört zur Analysis, wir werden aber kurz angeben, was sich in unserer Situation unter einer mehrdimensionalen Integration zu verstehen ist:

Zur Integration stetiger Funktionen in mehreren Veränderlichen:

Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) ist insbesondere auch in jeder einzelnen Variablen x^i stetig, d.h. bei festen $x_0^k \in \mathbb{R}, k \in \{1,2,\ldots,n\}, k \neq i$, ist die Funktion

$$x^i \longmapsto f(x_0^1, x_0^2, \ldots, x^i, \ldots, x_0^n), \quad x^i \in \mathbb{R},$$

eine stetige Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ (bzw. nach $\mathbb{C}$). Daher existiert für jedes kompakte Intervall $I \in \mathbb{R}$ das Integral

$$\int_I f(x_0^1, x_0^2, \ldots, x^i, \ldots, x_0^n)dx^i$$

und liefert eine stetige Funktion in den verbleibenden $n-1$ Variablen $x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^{i-1}, x_0^{i+1} \ldots, x_0^n$. Für kompakte Intervalle $I_1, I_2, \ldots, I_n \in \mathbb{R}$ ist deshalb das *iterierte Integral* über den *Quader* $Q := I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$

$$\int_Q f(x)dx^1dx^2\ldots dx^n := \int_{I_1}(\int_{I_2}(\ldots(\int_{I_n} f(x^1,x^2,\ldots,x^n)dx^n)\ldots dx^2)dx^1$$

wohldefiniert.
Das *uneigentliche Integral* $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$ ist dann der Limes

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_{Q\mu} f(x)dx$$

über alle aufsteigenden Folgen von Quadern $Q_\mu = I_{\mu_1} \times \ldots I_{\mu_2} \times I_{\mu_n} \subset \mathbb{R}^n$ mit $\bigcup_{\mu\in\mathbb{N}} Q_\mu = \mathbb{R}^n$.

Es lässt sich jetzt leicht nachrechnen, dass für $\phi, \varphi, \psi \in \mathcal{S}$ und $s \in \mathbb{R}$ stets gilt:

$$
\begin{aligned}
<\phi + \varphi, \psi> \; &= \; <\phi, \psi> + <\varphi, \psi>, \\
<s\phi, \psi> \; &= \; s<\phi, \psi>, \\
<\phi, \psi> \; &= \; <\psi, \phi>.
\end{aligned}
$$

Also ist $< \, , >$ bilinear und symmetrisch. Außerdem ist diese Bilinearform positiv definit. Das folgt aus der Tatsache, dass für stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f \geq 0$ stets gilt: Aus $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 0$ folgt $f = 0$. Denn daraus ergibt sich für $\phi \in \mathcal{S}$: Aus $<\phi, \phi> = 0$, also $\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)|^2 dx = 0$, folgt $\phi = 0$.

6° Ähnlich wichtig für die Quantenmechanik ist der Vektorraum

$$\mathcal{C}_2(\mathbb{R}^n) := \{\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 dx < \infty\}.$$

$\mathcal{C}_2(\mathbb{R}^n)$ ist ebenfalls ein unendlichdimensionaler Vektorraum (es gilt im übrigen $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}_2(\mathbb{R}^n)$).

Zur Integrierbarkeit von $\varphi\,\psi$ (aus der Analysis):

Für $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R}^n)$ ist $x \longmapsto \varphi(x)\psi(x)$ uneigentlich integrierbar, denn für kompakte Quader $Q \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|\int_Q \varphi(x)\psi(x)dx|^2 \leq (\int_Q |\varphi(x)|^2 dx)(\int_Q |\psi(x)|^2 dx)$$

(Hölder-Ungleichung).

Daher ist

$$<\varphi, \psi> := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\psi(x)dx$$

für $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_2$ wohldefiniert und liefert wie in 5° ein euklidisches Skalarprodukt.

7° Schließlich ist für ein kompaktes Intervall $I \in \mathbb{R}$ der Raum $\mathcal{C}(I)$ der stetigen Funktionen ein unendlichdimensionaler, euklidischer Vektorraum mit

$$<\varphi, \psi> := \int_I \varphi(x)\psi(x)dx, \;\; \varphi, \psi \in \mathcal{C}(I)$$

als Skalarprodukt.

Die letzten beiden Beispiele lassen sich verallgemeinern auf $\mathcal{C}_2(\Omega)$ für offene Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und auf $\mathcal{C}(K)$ für kompakte Mengen $K \subset \mathbb{R}^n$.

B. Ein euklidischer Vektorraum ist normiert.

(41.3) Lemma: Es sei $(V, < \, , \, >)$ mit einem euklidischen Skalarprodukt $< \, , \, >$: $V \times V \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann wird durch

$$\|v\| := \sqrt[2]{<v, v>}, \quad v \in V,$$

eine Norm auf V definiert, das heißt:

1° $\|v\| \geq 0$ und $(\|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = 0)$ für $v \in V$.
2° $\|sv\| = |s| \, \|v\|$ für $v \in V$ und $s \in \mathbb{R}$.
3° $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$.

Das wurde in 11.5 bewiesen. Diese Norm wird als die *euklidische Norm* bezeichnet. Gelegentlich wird die euklidische Norm einfach als Betrag geschrieben (zum Beispiel im Falle $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt, vgl. 41.2).

Wesentlich für den Beweis der Dreiecksungleichung 41.3.3° (vgl. 11.6) sind dabei die:

(41.4) Cauchy–Schwarz–Ungleichungen: Für alle $v, w \in V$ gilt

$$|<v, w>| \leq \|v\| \, \|w\| \, .$$

Mit Hilfe der euklidischen Norm wird auf einem euklidischen Raum $(V, < \, , \, >)$ eine Topologie definiert. Daher spielen Konvergenz- und Stetigkeitseigenschaften eine wichtige Rolle, zumindestens im Falle $\dim V = \infty$. Darauf werden wir in den Paragraf 45 und 46 eingehen.

C. Orthogonalität und Orthonormalisierung

(41.5) Definition: $(V, < \, , \, >)$ sei ein euklidischer Vektorraum.

1° Zwei Vektoren $a, b \in V$ heißen *orthogonal (zueinander)*, in Zeichen $a \perp b$, wenn $<a, b> = 0$ gilt. Man sagt auch, dass a auf b *senkrecht* steht, oder b auf a. Zwei Mengen $A, B \subset V$ heißen *orthogonal (zueinander)*, in Zeichen $A \perp B$, wenn alle $a \in A$ auf allen $b \in B$ senkrecht stehen, d.h. wenn für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ stets $<a, b> = 0$ gilt.

2° Für $A \subset V$ heißt

$$A^{\perp} := \{v \in V : <v, a> = 0 \text{ für alle } a \in A\}$$

das *orthogonale Komplement*.

3° Eine Teilmenge $B \subset V$ heißt *Orthonormalsystem*, kurz *ONS*, wenn die Vektoren $v \in B$ alle die Länge 1 haben, $\|v\| = 1$, und wenn sie paarweise orthogonal zueinander sind, d.h. wenn $<v, w> = 0$ für alle $v, w \in B$ mit $v \neq w$ gilt. Kurz: $<v, w> = \delta_{vw}$.

(41.6) Bemerkungen:

1° $A^\perp$ ist Untervektorraum von V und es gilt: $A \cap A^\perp = 0$.

2° Ein ONS ist stets linear unabhängig. Im endlichen Fall wird auch $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ geschrieben und im abzählbaren Fall wird B oft als Folge $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ aufgefasst, jeweils mit paarweise verschiedenen Folgengliedern.

(41.7) Satz (Orthonormalisierung nach E. Schmidt): Sei $(b_j)_{j\geq 1}$ eine linear unabhängige Folge im euklidischen Vektorraum $(V, < \, , \, >)$ (endlich oder unendlich). Dann liefert die rekursive Definition:

$$\begin{array}{lll} c_1 & := & \frac{b_1}{\|b_1\|} \\ c_{j+1} & := & \frac{b_{j+1} - \sum_{i=1}^{i=j} <b_{j+1}, c_i> c_i}{\left\| b_{j+1} - \sum_{i=1}^{i=j} <b_{j+1}, c_i> c_i \right\|} \end{array}$$

ein Orthogonalsystem (c_j) mit $\mathrm{span}\{b_j : j \geq 1\} = \mathrm{span}\{c_j : j \geq 1\}$.

Beweis: Durch Induktion nach j wird die folgende Aussage bewiesen: $(c_1, c_2, \ldots, c_j)$ ist ein ONS und es gilt $\mathrm{span}\{c_i : i \in \mathbb{N}\ , i \leq j\} = \mathrm{span}\{b_j : j \in \mathbb{N}\ , i \leq j\}$.

Der Fall $j = 1$ ist klar. Der Induktionsschritt $j \longrightarrow j+1$ ergibt sich folgendermaßen:

Wegen $b_{j+1} \notin \mathrm{span}\{b_i : i \in \mathbb{N}\ , i \leq j\} = \mathrm{span}\{c_j : j \in \mathbb{N}\ , i \leq j\}$ gilt erst einmal

$$b_{j+1} - \sum_{i=1}^{i=j} <b_{j+1}, c_i> c_i \neq 0\,,$$

deshalb ist c_{j+1} wohldefiniert. $\|c_{j+1}\| = 1$ ist klar und $<c_{j+1}, c_k> = 0$ für $k \leq j$ sieht man durch Einsetzen:

$$<b_{j+1} - \sum_{i=1}^{i=j} <b_{j+1}, c_i> c_i, c_k> = <b_{j+1}, c_k> - \sum_{i=1}^{i=j} <b_{j+1}, c_i><c_i, c_k> = 0$$

wegen $<c_i, c_k> = \delta_{ik}$.

Nach Konstruktion gilt $c_{j+1} \in \mathrm{span}\{b_1, b_2, \ldots, b_{j+1}\}$ und die Definitionsgleichung von c_{j+1} zeigt $b_{j+1} \in \mathrm{span}\{c_1, c_2, \ldots, c_{j+1}\}$, also

$$\mathrm{span}\{c_i : i \in \mathbb{N}\ , i \leq j+1\} = \mathrm{span}\{b_j : j \in \mathbb{N}\ , i \leq j+1\}.$$

(41.8) Bemerkungen:

1° Sei $\dim V < \infty$. Dann ist eine Orthonormalbasis (ONB) nichts anderes als ein Orthonormalsystem, das zugleich ein Erzeugendensystem ist.

2° Jeder n-dimensionale euklidische Raum hat eine Orthonormalbasis, wie wir bereits in 41.2.2° wiederholt haben. Die Existenz ergibt sich aber auch aus dem Orthonormierungsverfahren. Für eine konkrete ONB $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ hat jeder Vektor $v \in V$ die Entwicklung

$$\boxed{v = \sum_{i=1}^{i=n} <b_i, v> b_i.}$$

3° Ein Analogon für den Begriff einer Orthonormalbasis (ONB) und für solche „Entwicklungen“ im Falle unendlichdimensionaler Räume wird in Paragraf 45 behandelt: Das „vollständige ONS“, bzw. die „Hilbertraumbasis“.

D. Orthogonale Abbildungen

Der Begriff der orthogonalen Abbildung euklidischer Räume ist bereits bekannt: Wir haben orthogonale Abbildungen in einem allgemeineren Zusammenhang (d.h. auch für allgemeinere Geometrien wie z.B. die Minkowski-Geometrie) in 25.11–13 kennengelernt.

(41.9) Definition: $f \in \operatorname{Hom}(V,V)$ heißt *orthogonal*, wenn für alle $v, w \in V$ stets $<v,w> = <f(v), f(w)>$ gilt, und wenn f surjektiv ist.

Entsprechend heißt eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *orthogonal*, wenn A bezüglich des Standard-Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^n$ orthogonal ist, wenn also für alle Spaltenvektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ stets $<x,y> = <Ax, Ay>$, also $x^\top y = (Ax)^\top Ay$ gilt.

Orthogonale Abbildungen sind stets injektiv, also bijektiv. Im Falle $\dim V < \infty$ folgt die Surjektivität bereits aus der Injektivität, also aus der Bedingung $<v,w> = <f(v), f(w)>$ für alle $v, w \in V$. Daher muss die Surjektivität bei den orthogonalen Matrizen auch nicht extra gefordert werden.

(41.10) Bemerkung: Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1° A ist orthogonal.
2° Die Spaltenvektoren von A bilden eine ONB (ein ONS).
3° Die Zeilenvektoren von A bilden eine ONB (ein ONS).
4° Es gilt $A^\top A = E_n$ für die $n \times n$–Einheitsmatrix E_n.

Insbesondere gilt für orthogonale Matrizen A: Neben $A^\top A = E_n$ gilt auch $AA^\top = E_n$. A ist daher invertierbar mit der Inversen $A = A^\top$.

(41.11) Definition: $\mathrm{O}(n)$ oder $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ bezeichnet die Menge aller orthogonalen Matrizen aus $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(41.12) Satz:

1° $\mathrm{O}(n)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, und es gilt für alle $R \in \mathrm{O}(n)$ stets $|\det R| = 1$. $\mathrm{O}(n)$ ist die *orthogonale Gruppe*.

2° $\mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{O}(n), \det A = 1\}$ ist Untergruppe von $\mathrm{O}(n)$. $\mathrm{SO}(n)$ ist die *spezielle orthogonale Gruppe*.

3° $(V, < \, , >)$ sei n–dimensionaler euklidischer Raum und $f \in \operatorname{Hom}(V,V)$ eine lineare Abbildung. Dann ist f genau dann orthogonal, wenn die darstellende Matrix bezüglich einer ONB orthogonal ist.

4° $(V, < \, , \, >)$ sei wieder ein n–dimensionaler euklidischer Raum. Die Gesamtheit aller Orthonormalbasen von V wird in folgender Weise durch die Gruppe $\mathrm{O}(n)$ parametrisiert. Sei $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ eine ONB. Dann gilt:

Jede ONB $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ definiert durch $c_j = A_j^\nu b_\nu$ eine Matrix $A = (A_i^\nu) \in \mathrm{O}(n)$.

Jede Matrix $A = (A_i^\nu) \in \mathrm{O}(n)$ liefert durch $c_j := A_j^\nu b_\nu$ eine ONB $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

E. Orthogonale Projektion

Wir erinnern an den Begriff der direkten Summe zweier Untervektorräume U, W eines Vektorraumes V: $U + W$ ist *direkte Summe* von U, W, wenn die Darstellung eines Vektors $v \in U + W$ als Summe $v = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$ eindeutig ist. Wenn das der Fall ist, wird $U + W = U \oplus W$ geschrieben. Umgekehrt bedeutet $U + W = U \oplus W$, dass es sich um eine direkt Summe handelt. W wird dann ein *Komplement* zu U genannt (und umgekehrt U ein Komplement zu W).

Es gilt: $U + W$ ist genau dann direkte Summe von U, W, wenn $U \cap W = 0$ ist. Ebenso: $U + W$ ist genau dann direkte Summe von U, W, wenn die natürliche Abbildung $U \times W \to V$, $(u, w) \mapsto u + w$, injektiv ist.

Im Falle $U + W = V$ bedeutet die Direktheit der Summe also, dass $V = U \oplus W$ isomorph zum Produkt $U \times W$ der Vektorräume U, W ist. Siehe außerdem auch 41.17.1° für den Zusammenhang einer solchen direkten Summendarstellung und der Existenz von Projektionen.

(41.13) Satz: U sei ein endlichdimensionaler Untervektorraum des euklidischen Vektorraumes $(V, < \, , \, >)$. Dann gilt $V = U \oplus U^\perp$.

Beweis: Nach 41.6 wissen wir bereits $U \cap U^\perp = 0$ und $U^\perp$ ist Untervektorraum. Also gilt $U + U^\perp = U \oplus U^\perp$, und es bleibt zu zeigen, dass $U + U^\perp$ der ganze Raum V ist.

Nach 41.7 bzw. 41.2.2° hat U als endlichdimensionaler euklidischer Raum eine ONB $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Wir setzen für $v \in V$:

$$P(v) := \sum_{\nu=1}^{n} <b_\nu, v> b_\nu .$$

Dann gilt $P(v) \in U$ für alle $v \in V$, und $w := v - P(v)$ erfüllt

$$\begin{aligned} <w, b_j> &= <v, b_j> - <(\textstyle\sum_{\nu=1}^n <b_\nu, v> b_\nu), b_j> \\ &= <v, b_j> - \textstyle\sum_{\nu=1}^n <b_\nu, v><b_\nu, b_j> \\ &= <v, b_j> - <v, b_j> \\ &= 0 \end{aligned}$$

für $j = 1, 2, \ldots, n$. Also gilt $w = v - P(v) \in U^\perp$. Insgesamt haben wir gezeigt:

$$v = P(v) + (v - P(v)) \quad \text{mit} \quad P(v) \in U \, , \; v - P(v) \in U^\perp ,$$

also $v \in U + U^\perp$.

(41.14) Gegenbeispiel: In ℓ_2 ist $U := \operatorname{span}\{e_k : \mathbb{N}\}$ der Untervektorraum der endlichen Linearkombinationen von den „Einheitsvektoren“ $e_k = (\delta_{kj})$. Es ist

$U^\perp = 0$, denn fr $x = (x_k) \in \ell_2$ mit $<e_k, x> = 0$ gilt $v = 0$ wegen $<e_k, v> = v_k$.

(41.15) Definition: $P : V \to V$ sei linear.
1° P heißt *Projektion*, wenn $P \circ P = P$.
2° Eine Projektion P heißt *orthogonale Projektion* (bezüglich eines vorgegebenen euklidischen Skalarprodukts), wenn gilt: $\mathrm{Im}P \perp \mathrm{Ker}P$.

Im Beweis zu 41.13 wurde eine orthogonale Projektion P angegeben, die eine orthogonale Zerlegung festlegt: $U = \mathrm{Im}P, U^\perp = \mathrm{Ker}P$ und $V = U \oplus U^\perp$.

(41.16) Satz: Es sei $P : V \to V$ ein Homomorphismus von Vektorräumen.
1° Ist P Projektion, so gilt $\mathrm{Ker}P \oplus \mathrm{Im}P = V$.
2° Ist P eine Projektion und $(V, < \, , \, >)$ euklidischer Vektorraum, so ist P genau dann orthogonal, wenn P in folgendem Sinne *selbstadjungiert* ist:

$$<P(v), w> = <v, P(w)> \quad \text{für alle} \quad v, w \in V.$$

Beweis:
1° Wegen $v = Pv + (v - Pv)$ ist $V = \mathrm{Im}P + \mathrm{Ker}P$, denn es ist $v - Pv \in \mathrm{Ker}P$: $P(v - Pv) = Pv - P(Pv) = Pv - Pv = 0$. Die Darstellung ist eindeutig, bzw. $\mathrm{Ker}P \cap \mathrm{Im}P = 0$, wegen: $v \in \mathrm{Ker}P \cap \mathrm{Im}P$ heißt $Pv = 0$ und $v = Pw$ für ein $w \in V$. Also folgt $v = Pw = PPw = Pv = 0$.
2° „$\Rightarrow$“: Aus $\mathrm{Ker}P \perp \mathrm{Im}P$ folgt: $<Pv, w> = <Pv, Pw + (w - Pw)> = <Pv, Pw>$ da $Pv \perp w - Pw$; und analog $<Pv, Pw> = <v, Pw>$.
„$\Leftarrow$“: Seien $v \in$ Ker P und $w = Pu$. Dann $<v, w> = <v, Pu> = <Pv, u> = <0, u> = 0$.

(41.17) Bemerkungen:
1° $V = U \oplus W$ ist gleichbedeutend mit: Es gibt eine Projektion P mit $U = \mathrm{Im}P$.

2° $V = U \oplus W$ und $U \perp W$ ist gleichbedeutend mit: Es gibt eine orthogonale Projektion P mit $U = \mathrm{Im}P$.

3° Für eine orthogonale Projektion P auf $U = \mathrm{Im}P$ ist $P(v)$ derjenige Vektor aus U, der v am nächsten ist: $\|v - u\|^2 = \|(v - Pv) + (Pv - u)\|^2 = <(v - Pv) + (Pv - u), (v - Pv) + (Pv - u)> = \|v - Pv\|^2 + \|Pv - u\|^2 + 2<v - Pv, Pv - u> = \|v - Pv\|^2 + \|Pv - u\|^2$, da $v - Pv \in U^\perp, Pv - u \in U$. Daher stets:

$$\|v - u\| \geq \|v - Pv\|.$$

(41.18) Beispiel: Im Falle der Standardebene $V = \mathbb{R}^2$ gilt:
1° Die x–Achse $U := \{(x, 0)^\top : x \in \mathbb{R}\}$ hat viele Komplemente: Sei $w \in \mathbb{R}^2$ mit $w \notin U$. Dann ist $\{\{(1, 0)^\top, w\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$, also gilt $U \oplus \mathbb{R}w = \mathbb{R}^2$.
2° Die x–Achse $U := \{(x, 0)^\top : x \in \mathbb{R}\}$ hat aber genau ein **orthogonales Komplement** $W = \{(0, y)^\top : y \in \mathbb{R}\} = U^\perp$: $U \oplus W = V$ und $U \perp W$.