§9 Der affine Raum – Teil 2: Geraden

Wir sind auf dem Weg zum Begriff der *affinen Raumes*.
In §7 haben wir unter Zugrundelegung von „Punkten“ und geeignet guten „Translationen“ zum Begriff des *Translationsraumes* und damit zum Begriff der *abelschen Gruppe* geführt.
In diesem Paragrafen werden wir mit Hilfe der Vorstellung von dem, was eine „Gerade“ im Raum ausmachen sollte, zum Begriff des *affinen Raumes* und dem Begriff des *Vektorraumes* gelangen.

Wir stellen zunächst eine Verbindung von §8 zu §7 her (Umkehrung der Aussage 7.8) :

(9.1) Satz: Sei G eine abelsche additive Gruppe. Setze

$$A := A(G) := G,\ T := T(G) := G \ \text{ und } \ t(a,b) := b - a.$$

Dann ist (A,T,t) eine Translationsraum.

Folie 1

Kapitel II, §9

(9.2) Definition – Satz: Das Produkt zweier Gruppen G und H ist gegeben durch die Verknüpfung

Dabei bezeichnet die Verknüpfung von G bzw. von H.
Also

wenn mit die Gruppenoperation auf der Produktmenge bezeichnet wird.

Die Produktmenge mit als Verknüpfung ist eine Gruppe.

(9.3) Definition: Eine Gruppe G heißt *zyklisch*, wenn sie von einem Element erzeugt wird, d.h. wenn es a aus G gibt mit:

Folie 2

Kapitel II, §9 Mathematisches Institut

$G = \{a^n : n \text{ aus } \mathbf{Z}\}$
(in multiplikativer Schreibweise).
Wir haben den folgenden **Struktursatz**:

(9.4) Satz: Sie G eine zyklische Gruppe. Dann gilt:
1° G ist abelsch.
2° G ist isomorph zu **Z** oder es gibt eine natürliche Zahl n , so dass G zu $E_{(n)}$ isomorph ist.

Das Produkt abelscher Gruppen ist abelsch.
Das Produkt zyklischer Gruppen ist nicht immer zyklisch.

Zurück zur „Geometrie“:
Zu einer Gruppe G hat man also insbesondere auch die Gruppen $G \times G = G^2$, $G \times G \times G = G^3$, etc.

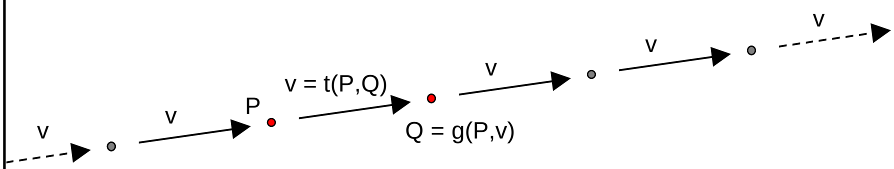
Folie 3

Kapitel II, §9 Mathematisches Institut

Nach Festlegung auf eine abelschen Gruppe G in dem abstrakten Modell nach 9.1 entspricht – ganz vordergründig –
der Translationsraum ((A(G),T(G),t) einer „Geraden“,
der Translationsraum $((A(G^2),T(G^2),t)$ einer „Ebenen“,
der Translationsraum $((A(G^3),T(G^3),t)$ einem „dreidimensionalem Raum“,

Was zeichnet die Vorstellung von einer Geraden aus? Welche Eigenschaften sehen wir in einem Translationsraum als essentiell für eine Gerade an?
Zunächst legen wir uns darauf fest, dass eine Gerade in einem Translationsraum (A,T,t) eine Punktmenge ist und dass sich die Inzidenzrelation durch das „Enthaltensein“ beschreibt.
Ein erster natürlicher Ansatz für eine Gerade als Punktmenge in A ist der folgende:

Folie 4



Die Gerade g, die durch zwei vorgegebene, voneinander verschiedene Punkte P und Q verläuft, enthalte die folgende, durch P und v = t(P,Q) festgelegte Punktmenge:

$$P + \mathbf{Z}v := \{P + zv : z \text{ aus } \mathbf{Z}\} .$$

Dabei ist zv als die in $8.8.3^{\circ}$ eingeführte additiv geschriebene „Potenz“ zu verstehen:

$0v := v$, $(n+1)v := nv + v$, sowie
$(-n)v := -(nv)$, für natürliche Zahlen n .

(9.5) Lemma: Für alle abelschen Gruppen T operiert **Z** auf T durch

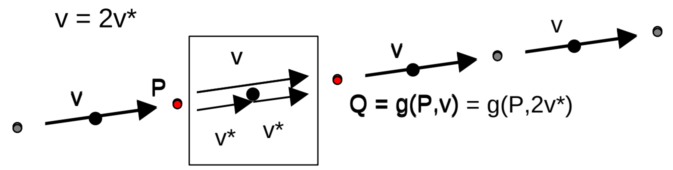
Dabei sind für v,w aus T und r,s aus **Z** die folgenden Regeln erfüllt:

1° $1v = v$.
2° $r(v + w) = rv + rw$.
3° $(r + s)v = rv + sv$.
4° $(rs)v = r(sv)$.

(9.6) Bemerkungen:

1° Es kann $nv = 0$ vorkommen, auch wenn n und v von 0 verschieden sind. (*Charakteristik eines Körpers*: Die kleinste natürliche Zahl p ungleich 0 mit $p1 = 0$, falls es ein solches p gibt.)

2° $P + \mathbf{Z}v$ kann in $P^* + \mathbf{Z}v^*$ vollkommen enthalten sein, ohne dass die beiden Mengen gleich sind. Zum Beispiel, wenn $P = P^*$ und $2v^* = v$ gilt.



3º Aus diesem Grunde liefert z.B. A = $\mathbf{Z}^2$ mit P + $\mathbf{Z}$v als „Ansatz für Geraden" keine (abstrakte) affine Ebene nach **§**5.

4º Das Beispiel 2º lässt die *uneingeschränkte Division durch natürliche Zahlen* vermissen.
D.h. die folgende Eigenschaft: Zu jedem von 0 verschiedenen Element v aus T und jeder von 0 verschiedenen natürlichen Zahl n gibt es ein weiteres Element w mit nw = v.
Dieses Element w ist im Falle der Existenz eindeutig bestimmt und kann mit $\frac{1}{n}v$ bezeichnet werden.

5º Für abelsche Gruppen T mit uneingeschränkter Division durch natürliche Zahlen kann die in 9.3 beschriebene Operation auf die Brüche von ganzen Zahlen, also auf die rationalen Zahlen ausgedehnt werden:

Die zu 9.3 analogen Regeln sollen dabei erhalten bleiben, und wir fordern sie ganz allgemein auch für einen beliebigen Körper:

(9.5) Definition: Ein *affiner Raum* ist ein Translationsraum (A,T,t) zusammen mit einem Körper K, der auf T so wirkt, dass die Regeln 1º-4º aus 9.3 erfüllt sind: Für alle v,w aus T und alle r,s aus K ist stets

1º 1v = v .
2º r(v + w) = rv + rw .
3º (r + s)v = rv + sv .
4º (rs)v = r(sv) .

Kapitel II, §9

Mathematisches Institut

In einem affinen Raum (A,T,t,K) hat man also auf dem Raum T der Translationen die in **§**7 eingeführte Addition, die T zu einer abelschen Gruppe macht und dazu noch die *Skalarmultiplikation*

$$K \times T \to T, (r,v) \mapsto rv,$$

so dass die Axiome 9.5.1° - 9.5.4° erfüllt sind.

Vektorraum:

Dadurch ist auf T die Struktur eines *Vektorraumes über K* definiert.

In **§**2 Satz 2.3 sind wir den Vektorraumaxiomen bereits begegnet. Insbesondere ist der Standardraum $\mathbf{R}^n$ ein Vektorraum über $\mathbf{R}$.

Geraden:

In einem affinen Raum (A,T,t,K) sind jetzt die Teilmengen der Form

$$g := P + Kv := \{P + rv : r \text{ aus } K\}$$

die *Geraden*.

Folie 9

Kapitel II, §9

Mathematisches Institut

(9.6) Beispiel: Sei K ein Körper.

$T = K^n$ erfüllt analog zu **§**2 (Standardraum) die Axiome einer abelschen Gruppe und bezüglich der Skalarmultiplikation

$$K \times K^n \to K^n, (r,v) \mapsto rv$$

die Axiome 9.5.1°-9.5.4°.

Daher wird durch

$$A = K^n, T = K^n, t(P,Q) = Q - P$$

Zusammen mit der Skalarmultiplikation auf T ein affiner Raum definiert.

Der Fall n = 2 liefert dann mit dem oben festgelegten Geradenbegriff eine (abstrakte) affine Ebene in Sinne von **§**5.

Was fehlt noch zur **Analytischen Geometrie**? Länge von Vektoren, Abstand zwischen Punkten, Winkel. Siehe **§**11.

Davor Vektorräume in **§**10: Axiome (noch einmal) und viele Beispiele.

Folie 10