Mathematisches Institut

Kapitel I. Vorspann zum Begriff Vektorraum

Folie 1

Mathematisches Institut

§1 Lineare Gleichungssysteme in zwei Unbestimmten

a, b, c, ... stehen im folgenden für Zahlen,
x, y, ... für Unbestimmte.

(1.1) Beispiel

...

(1.2) Definition: Allgemeine Systeme von 2 (linearen) Gleichungen in 2 Unbestimmten:

$$\Diamond \quad \begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

Gesucht sind Zahlen x und y, die ◊ erfüllen, sie heißen die *Lösungen* von ◊ .

Folie 2

LMU Mathematisches Institut

(1.3) Satz: Lösungstheorie zu

◊	ax + by = e cx + dy = f

:

1. Fall: a = b = c = d = 0 :
◊ hat nur dann eine Lösung, wenn e = f = 0.
In diesem Falle sind alle Paare (x,y) Lösungen.

2. Fall: ?(a,b,c,d) = 0, aber nicht alle a,b,c,d sind Null
(Dabei ist ?(a,b,c,d) := ad – bc .) :
◊ hat nur dann eine Lösung, wenn ?(a,e,c,f) = 0 und ?(e,b,f,d) = 0. In diesem Falle:
Wenn a ? 0 gilt, so sind die Lösungen: (1/a(e – bt), t), t beliebig.
Wenn b ? 0 gilt, so sind die Lösungen: (t, 1/b(e – at)), t beliebig.
Wenn c ? 0 gilt, so sind die Lösungen: (1/c(f – dt), t), t beliebig.
Wenn d ? 0 gilt, so sind die Lösungen: (t, 1/d(f – ct)), t beliebig.

Folie 3

LMU Mathematisches Institut

3. Fall (der wesentliche Fall): ?(a,b,c,d) ? 0 :
◊ hat dann die eindeutig bestimmte Lösung

x = ?(e,b,f,d)/?(a,b,c,d) , y = ?(a,e,c,f)/?(a,b,c,d) .

Bemerkung 1: Lösungsgesamtheit stets ‚linear': Punkt, Gerade, ganze Ebene.

Bemerkung 2: Fallunterscheidung!

Folie 4

LMU Mathematisches Institut

§2 Der Standardraum $\mathbf{R}^n$

Wichtiges Beispiel eines konkreten Vektorraumes, den wir zunächst nicht als Vektorraum einstufen. Wir führen $\mathbf{R}^n$ nur als Schreibweise für den nächsten Paragraphen ein, in dem wir allgemeine lineare Gleichungssysteme einführen wollen.

Mit **R** bezeichnen wir die Menge der reellen Zahlen zusammen mit der Addition und der Multiplikation.

Wir fixieren eine feste natürliche Zahl n größer als Null.

(2.1) Definition: Ein *n-Tupel* von Elementen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ist ein Objekt

$$(a_1, a_2, a_3, \ \ldots, \ a_n)$$

Folie 5

LMU Mathematisches Institut

mit der folgenden entscheidenden Regel für die Gleichheit:

Zwei solche n-Tupel

$$(a_1, a_2, a_3, \ \ldots, \ a_n) \ \text{ und } \ (b_1, b_2, b_3, \ \ldots, \ b_n)$$

sind genau dann gleich, wenn alle Komponenten gleich sind, das heißt wenn

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, \ \ldots, \ a_n = b_n$$

gilt.

(2.2) Definition: R sei die Menge der n-Tupel reeller Zahlen als Spalten, die wir auch *Spaltenvektoren* nennen:

Folie 6

$$\mathbf{R}^n := \left\{ x : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ mit } x_i \in \mathbf{R}, i = 1,2,\ldots n \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbf{R}, i = 1,2,\ldots n \right\}$$

Es werden zwei *Verknüpfungen* definiert auf $\mathbf{R}^n$, die *Addition* von Spaltenvektoren durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Mathematisches Institut

Also

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \text{für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Die *Skalarmultiplikation* wird definiert durch

$$l x = l \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} l x_1 \\ l x_2 \\ \vdots \\ l x_n \end{pmatrix} \quad \text{für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und } l \in \mathbf{R}.$$

(2.3) Rechenregeln: Für alle $x, y, z \in \mathbf{R}^n$ und r, s $\in \mathbf{R}$ sind die folgenden Gleichungen erfüllt:

Mathematisches Institut

1^o $(x + y) + z = x + (y + z)$

2^o Für den Vektor $\mathbf{o}$ aus $\mathbf{R}^n$ mit lauter Nullen als Komponenten gilt: $x + \mathbf{o} = x = \mathbf{o} + x$.

3^o Zu jedem x aus $\mathbf{R}^n$ existiert $-x$ aus $\mathbf{R}^n$ mit $x+(-x) = \mathbf{o}$.

4^o $x + y = y + x$

5^o $r(sx) = (rs)x$

6^o $1x = x$

7^o $r(x + y) = rx + ry$

8^o $(r+s)z = rz + sz$

Der Nullvektor **o** wird auch mit 0 bezeichnet. Vorsicht!

Folie 9