MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. M. Schottenloher
Dr. S. Tappe

SS 2007
Blatt 11

Lösungsskizzen zur MIIA: Analysis II für Mathematiker

1. Rechnung zu Teil a):

$$\begin{aligned}\int_\gamma z^n\,dz &= (b-a)\int_0^1 (a+(b-a)t)^n\,dt \\ &= (b-a)\left[\frac{1}{(n+1)(b-a)}\big(a+(b-a)t\big)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}\big(b^{n+1}-a^{n+1}\big).\end{aligned}$$

b) Für $m \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma z^m\,dz &= \int_0^{2\pi}(re^{it})^m ire^{it}\,dt = ir^{m+1}\int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t}\,dt \\ &= ir^{m+1}\left(\int_0^{2\pi}\cos((m+1)t)\,dt + i\int_0^{2\pi}\sin((m+1)t)\,dt\right) = 0,\end{aligned}$$

und für $m \in \mathbb{N}_1$ bekommen wir

$$\begin{aligned}\int_\gamma z^{-m}\,dz &= \int_0^{2\pi}(re^{it})^{-m} ire^{it}\,dt = ir^{1-m}\int_0^{2\pi} e^{i(1-m)t}\,dt \\ &= ir^{1-m}\left(\int_0^{2\pi}\cos((1-m)t)\,dt + i\int_0^{2\pi}\sin((1-m)t)\,dt\right) \\ &= ir^{1-m}\left(\int_0^{2\pi}\cos((m-1)t)\,dt - i\int_0^{2\pi}\sin((m-1)t)\,dt\right).\end{aligned}$$

Also ist $\int_\gamma z^{-1}\,dz = 2\pi i$ und $\int_\gamma z^{-m}\,dz = 0$ für $m \geq 2$. Es folgt für $m \in \mathbb{Z}$

$$\int_\gamma z^m\,dz = \begin{cases} 2\pi i, & m=-1, \\ 0, & m \neq -1. \end{cases}$$

Rechnung zu Teil c):

$$\int_\gamma |z|\,dz = \int_{-1}^1 |t|\,dt = 2\int_0^1 t\,dt = 1.$$

Rechnung zu Teil d):

$$\int_\gamma |z|\, dz = -i \int_0^\pi e^{i(\pi - t)}\, dt = -i \int_0^\pi e^{it}\, dt = -\left[e^{it}\right]_0^\pi = 2.$$

2. a) Die gesuchte Jacobi-Matrix lautet

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} -y\sin(xy) & -x\sin(xy) \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) \end{pmatrix}.$$

b) Es sei $L \in \mathcal{L}(E)$ definiert durch $L := \mathrm{Id}$. Dann gilt unter Benutzung der Dreiecksungleichung, Aufgabe 3a) von Blatt 8 und der Reihe für die Exponentialfunktion die Konvergenz

$$\frac{|||f(0+A) - f(0) - L(A)|||}{|||A|||} = \frac{1}{|||A|||}\, ||| \sum_{n=2}^\infty \frac{A^n}{n!} ||| \le \frac{1}{|||A|||} \sum_{n=2}^\infty \frac{|||A|||^n}{n!}$$
$$\le \frac{1}{|||A|||} \sum_{n=0}^\infty \frac{|||A|||^{n+2}}{n!} = |||A\,|||\, e^{|||A|||} \to 0 \quad \text{für } |||A||| \to 0.$$

Also ist f in $A = 0$ total differenzierbar mit $D_f(0) = \mathrm{Id}$.

c) Nach Aufgabe 3a) von Blatt 8 ist $\mathrm{Id} - A$ für jedes $A \in \Omega$ invertierbar mit

$$(\mathrm{Id} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty A^n.$$

Es sei $L \in \mathcal{L}(E)$ definiert durch $L := \mathrm{Id}$. Es folgt unter Benutzung der Dreiecksungleichung, Aufgabe 3a) von Blatt 8 und der geometrischen Reihe die Konvergenz

$$\frac{|||f(0+A) - f(0) - L(A)|||}{|||A|||} = \frac{1}{|||A|||}\, ||| \sum_{n=2}^\infty A^n ||| \le \frac{1}{|||A|||} \sum_{n=2}^\infty |||A|||^n$$
$$\le \frac{1}{|||A|||} \sum_{n=0}^\infty |||A|||^{n+2} = |||A\,|||\, \frac{1}{1 - |||A|||} \to 0 \quad \text{für } |||A||| \to 0.$$

Also ist f in $A = 0$ total differenzierbar mit $D_f(0) = \mathrm{Id}$.

d) Sei $a \in C[0,1]$ fest. Wir definieren die lineare Abbildung $L = L(a)$:

$C[0,1] \to C[0,1]$ durch $L(h) := 2ah$. Wir beachten, daß L stetig bei 0 ist, denn

$$\|L(h)\|_\infty = 2\|ah\|_\infty \leq 2\|a\|_\infty \|h\|_\infty \to 0 \quad \text{für } h \to 0.$$

Somit ist $L \in \mathcal{L}(C[0,1])$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|_\infty}{\|h\|_\infty} &= \frac{\|(a+h)^2 - a^2 - 2ah\|_\infty}{\|h\|_\infty} \\ = \frac{\|h^2\|_\infty}{\|h\|_\infty} \leq \frac{\|h\|_\infty \cdot \|h\|_\infty}{\|h\|_\infty} &= \|h\|_\infty \to 0 \quad \text{für } h \to 0. \end{aligned}$$

Also ist f in a total differenzierbar mit $D_f(a) = L$.

3. Wir vereinbaren die Notation

$$\begin{aligned} |\alpha| &:= \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \\ x^\alpha &:= x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} \end{aligned}$$

für $\alpha \in \mathbb{N}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist jedes Polynom $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ von der Form

$$p(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \cdot x^\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

für ein $m \in \mathbb{N}$ und reelle Zahlen $a_\alpha \in \mathbb{R}$. Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_j} p(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \cdot \alpha_j \cdot x^{\alpha - e_j}, \quad j = 1, \ldots, n$$

wobei die e_i wie gewohnt die Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^n$ bezeichnen, sind stetig und somit ist p total differenzierbar.

4. Es sei $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\| \neq 0$. Sofern $v_1 \neq 0$, folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} f(0,0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f((0,0) + hv) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(hv)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{hv_1(hv_2)^2}{h((hv_1)^2 + (hv_2)^4)} = \lim_{h \to 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + v_2^4 h^2} = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2}. \end{aligned}$$

Im Falle $v_1 = 0$ ist $v_2 \neq 0$ (wegen $\|v\| \neq 0$) und wir erhalten

$$\frac{\partial}{\partial v} f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((0,0) + hv) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

Also existieren sämtliche Richtungsableitungen. f ist jedoch nicht stetig in $(0,0)$, denn es gilt $(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}) \to (0,0)$ für $n \to \infty$, aber die Folge

$$f(\tfrac{1}{n^2}, \tfrac{1}{n}) = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^4} = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2}$$

konvergiert nicht gegen $f(0,0) = 0$. Somit ist f erst recht nicht total differenzierbar.

5. a) Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \sin y, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x \cdot \cos y$$

sind stetig auf $\mathbb{R}^2$ und somit ist f total differenzierbar.
b) f ist nicht stetig in $(0,0)$, denn es gilt $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0)$ für $n \to \infty$, aber die Folge

$$f(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

konvergiert nicht gegen $f(0,0) = 0$. Also ist f erst recht nicht total differenzierbar.
c) Wir zeigen zunächst, daß f stetig in $(0,0)$ ist. Es sei (x_n, y_n) eine Folge in $\mathbb{R}^2$ mit $(x_n, y_n) \to (0,0)$. Wegen $f(0,y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ nehmen wir ohne Einschränkung an, daß $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$|f(x_n, y_n) - f(0,0)| = \left| \frac{x_n^3}{x_n^2 + y_n^2} \right| \leq \left| \frac{x_n^3}{x_n^2} \right| = |x_n| \to 0.$$

Weiterhin ist f partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((0,0) + (h,0)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3}{h \cdot h^2} = 1,$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((0,0) + (0,h)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

und für $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{x^2(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = -\frac{2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Die partiellen Ableitungen sind jedoch nicht stetig, da $\frac{\partial}{\partial x} f(0, \frac{1}{n}) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, aber $\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) = 1$ ist. Damit ist die Frage, ob f total differenzierbar ist, im Moment noch unbeantwortet. Wäre f in $(0, 0)$ total differenzierbar, müßte für die stetige lineare Abbilding $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $L(x, y) = \langle (x, y), (1, 0) \rangle = x$ gelten:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f((0, 0) + h) - f(0, 0) - L(h)}{\|h\|} = 0.$$

Es ist jedoch für $h = (h_1, h_2) \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{f((0, 0) + h) - f(0, 0) - L(h)}{\|h\|_2} &= \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \left(\frac{h_1^3}{h_1^2 + h_2^2} - h_1 \right) \\ &= -\frac{h_1 h_2^2}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

wobei $\| \cdot \|_2$ wie gewohnt die euklidische Norm im $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Speziell für $h_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ folgt also

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f((0, 0) + h) - f(0, 0) - L(h)}{\|h\|_2} = -\lim_{n \to \infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{\left(2 \left(\frac{1}{n}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{8}}.$$

Also ist f nicht total differenzierbar.

d) Wir zeigen zunächst, daß f stetig in $(0, 0)$ ist. Es sei (x_n, y_n) eine Folge in $\mathbb{R}^2$ mit $(x_n, y_n) \to (0, 0)$. Wegen $f(0, y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$, nehmen wir ohne Einschränkung an, daß $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$|f(x_n, y_n) - f(0, 0)| = \left| \frac{x_n^3}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \right| \leq \left| \frac{x_n^3}{x_n} \right| = |x_n^2| \to 0.$$

Weiterhin ist f partiell differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f((0, 0) + (h, 0)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3}{h \cdot |h|} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f((0, 0) + (0, h)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0 \end{aligned}$$

und für $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{x^2(2x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = -\frac{x^3 y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die partiellen Ableitungen sind in allen Punkten $(x,y) \neq (0,0)$ stetig, darum ist f auch in allen Punkten $(x,y) \neq (0,0)$ total differenzierbar. Wir zeigen nun, daß f auch in $(0,0)$ total differenzierbar ist. Sei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die stetige lineare Abbildung $L(x,y) = \langle (x,y), (0,0) \rangle = 0$. Dann gilt

$$\frac{|f((0,0)+h) - f(0,0) - L(h)|}{\|h\|_2} = \left| \frac{h_1^3}{h_1^2 + h_2^2} \right| \leq \left| \frac{h_1^3}{h_1^2} \right| = |h_1| \to 0$$

für $h = (h_1, h_2) \to 0$ (Ohne Einschränkung sei wieder $h_1 \neq 0$). Also ist f total differenzierbar.

e) f ist stetig in $(0,0)$, denn für jede Folge $(x_n, y_n) \to 0$ gilt

$$|f(x_n,y_n) - f(0,0)| = \left| (x_n^2 + y_n^2) \cdot \sin((x_n^2+y_n^2)^{-\frac{1}{2}}) \right| \leq x_n^2 + y_n^2 \to 0$$

für $n \to \infty$ wegen $|\sin x| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Weiterhin ist f in $(0,0)$ partiell differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(0,0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f((0,0)+(h,0)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \cdot \sin \frac{1}{|h|}}{h} = \lim_{h \to 0} h \cdot \sin \frac{1}{|h|} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) &= 0. \end{aligned}$$

Die partielle Ableitung nach x in $(x,y) \neq (0,0)$ lautet

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2x \sin((x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}) - x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cos((x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}).$$

Für die Folge $(x_n, y_n) = (0, \frac{1}{2\pi n})$ gilt $(x_n, y_n) \to 0$, jedoch

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_n, y_n) = \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi n) - \cos(2\pi n) = -1,$$

konvergiert also nicht gegen $\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = 0$, d.h. die partiellen Ableitungen sind nicht stetig. Damit ist die Frage, ob f total differenzierbar ist, im Moment noch unbeantwortet. Wir zeigen, daß f in $(0,0)$ total differenzierbar ist. Es sei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die lineare Abbildung $L(x, y) = \langle (x, y), (0, 0) \rangle = 0$. Dann gilt wegen $|\sin x| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ die Konvergenz

$$\left| \frac{f((0,0)+h) - f(0,0) - L(h)}{\|h\|_2} \right| = \frac{h_1^2 + h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \left| \sin((x_n^2 + y_n^2)^{-\frac{1}{2}}) \right|$$
$$\leq \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \to 0$$

für $h = (h_1, h_2) \to 0$, wobei $\| \cdot \|_2$ wie gewohnt die euklidische Norm im $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Also ist f total differenzierbar.

6. Wir können $f \cdot g : \Omega \to \mathbb{R}$ wie folgt als Komposition darstellen:

$$f \cdot g : \Omega \xrightarrow{(f,g)} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{m} \mathbb{R}$$

mit $m(x, y) = xy$. Die Jacobi-Matrizen von (f, g) und m sind

$$D(f,g)(a) = \begin{pmatrix} Df(a) \\ Dg(a) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Dm(x,y) = (y, x).$$

Mit der Kettenregel folgt die totale Differenzierbarkeit von $f \cdot g$ im Punkte a mit

$$\begin{aligned} D(f \cdot g)(a) &= Dm(f(a), g(a)) \cdot D(f,g)(a) \\ &= (g(a), f(a)) \cdot \begin{pmatrix} Df(a) \\ Dg(a) \end{pmatrix} = f(a)\, Dg(a) + g(a)\, Df(a). \end{aligned}$$

b) Wir können $B(f, g) : \Omega \to G$ wie folgt als Komposition darstellen:

$$B(f,g) : \Omega \xrightarrow{(f,g)} F \times F \xrightarrow{B} G.$$

Die Ableitungen von (f, g) und B sind

$$D(f,g)(a)(h) = \begin{pmatrix} Df(a)(h) \\ Dg(a)(h) \end{pmatrix}$$
$$DB(a_1, a_2)(h_1, h_2) = B(a_1, h_2) + B(h_1, a_2).$$

Mit der Kettenregel folgt die totale Differenzierbarkeit von $B(f, g)$ in a mit

$$\begin{aligned} DB(f,g)(a)(h) &= DB(f(a), g(a)) \circ D(f,g)(a)(h) \\ &= B(f(a), Dg(a)(h)) + B(Df(a)(h), g(a)). \end{aligned}$$