Musterlösung zu Blatt 9, Aufgabe 2

I Aufgabenstellung

Es sei $J = [0,1]$ und $f : J \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^3$.
a) Finden Sie eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}(J,\mathbb{R})$ mit $f_n \leq f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.
b) Bestimmen Sie $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und bestimmen Sie daraus

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

II Beweisidee

„Worum geht's?": Gesucht ist eine Folge von Treppenfunktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die monoton steigt und die eigentliche Funktion f gleichmäßig approximiert. Ist eine solche Folge gefunden, so berechne man das Integral jedes f_n, woraus man dann auf das Integral von f schließen soll.

„Wie mach' ich das?": Man benutze dazu einige Sätze aus der Vorlesung bzw. dem Skript:

Satz (27.13)**.** Jede stetige Funktion $f : J \to E$ lässt sich gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximieren, das heißt, es gibt eine Folge (f_n) von Treppenfunktionen $f_n \in \mathcal{T}(J,E)$ mit $f_n \to f$ in $\mathcal{T}(J,E)$, also $\|f_n - f\| \to 0$. Anders ausgedrückt: Es gilt $\mathcal{C}(J,E) \subset \mathcal{S}(J,E)$.

Der Beweis wird durch fundamentale Konstruktion geführt. Um $\|f - f_n\| \to 0$ zu zeigen, kann man z.B. das Majorantenkriterium benutzen, also die Abweichung einer Treppenfunktion f_n von f durch die größte Abweichung auf einem Intervall abschätzen und dann die Konvergenz gegen 0 zeigen (für $n \to \infty$).
Für den zweiten Teil der Aufgabe nutzt man die folgende Bemerkung:

Bemerkung (27.14.3°)**.** Wir erhalten durch 27.13 in Verbindung mit 27.11 eine neue Interpretation des Integrals für stetige f: Für jede Folge (f_n) von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert, ist

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$$

wobei die $\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ einfache endliche Summen sind.

Mit diesem Satz kann man das gesuchte Integral der Funktion einfach als Grenzwert der Integrale der Folgenglieder berechnen. Der Satz (27.2.3°) liefert für das Integral einer Treppenfunktion g (mit der Zerlegung $Z = \{t_0, \dots, t_m\}$) gerade

$$\int_a^b g(t)\mathrm{d}t := \sum_{k=1}^{m} g_k \cdot (t_k - t_{k-1}) \quad ,$$

wobei g_k der konstante Wert der Treppenfunktion im Intervall $]t_{k-1}, t_k[$ ist. Nützlich wird dabei die explizite Formel der endlichen Summe von dritten Potenzen:

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

III Lösung

Man wähle wie im Beweis zu (27.13) eine Zerlegung $Z(m) = \{t_0, \ldots, t_m\}$, mit der Feinheit $\Delta Z(m) = \max\{t_{k+1} - t_k, k = 0, 1, \ldots, m-1\}$. Weiterhin wähle man $f_n(x) = f(t_k)$ auf $]t_k, t_{k+1}]$ mit einer genügend feinen Zerlegung $Z(m)$ für jedes n. Es gibt viele solche Zerlegungen. Ein Beispiel dafür ist $t_k = \frac{k}{2^n}, k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$. Damit ergibt sich

$$f_n(x) = f(t_k) = t_k^3 = \left(\frac{k}{2^n}\right)^3$$

Außerdem sei $f_n(0) = 0$, der noch fehlende Fall.
Wir überprüfen, ob die Eigenschaften zutreffen. x^3 ist streng monoton steigend auf $J = [0, 1]$ und die Folge von Treppenfunktionen nährt sich von unten an.
Sei $Z_n = \{u_0, \ldots, u_m\}, u_k = \frac{k}{2^n}$ die Zerlegung zu f_n und $Z_{n+1} = \{v_0, \ldots, v_j\}, v_k = \frac{k}{2^{n+1}}$ die Zerlegung zu f_{n+1}, dann gilt mit $x \in [v_{2k}, v_{2k+1}[\subset [u_k, u_{k+1}[$: $f_n(x) = f_{n+1}(x)$. Außerdem ist mit $x \in [v_{2k+1}, v_{2k+2}[\subset [u_k, u_{k+1}[\Rightarrow f(u_k) = f(v_{2k}) \leq f(v_{2k+1}) \Rightarrow f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, da x^3 auf J streng monoton steigend ist.

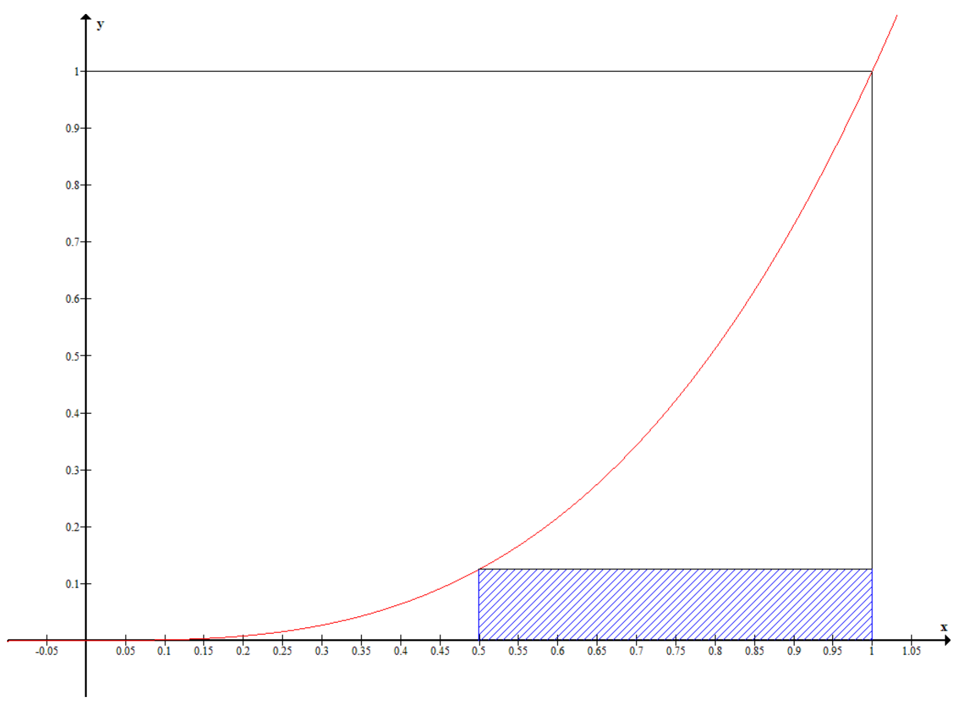

Abbildung 1: f_1

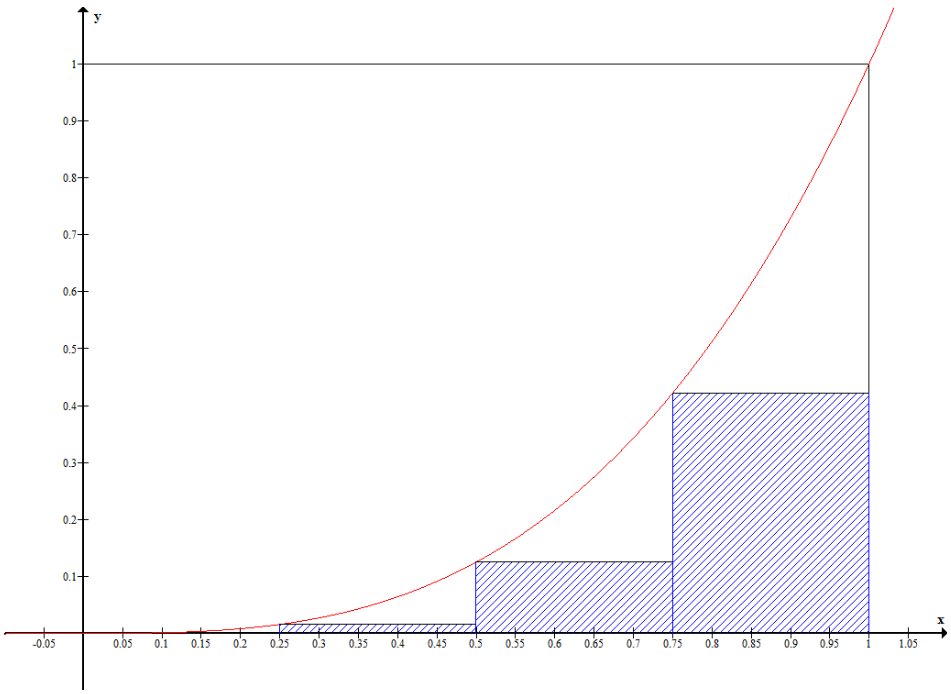

Abbildung 2: f_2

f_n konvergiert gegen f, denn auf einem Intervall $]t_k, t_{k+1}], t_k = \frac{k}{2^n}$ ist

$$\begin{aligned} \|f - f_n\| &\leq \left\| \left(\frac{k+1}{2^n}\right)^3 - \left(\frac{k}{2^n}\right)^3 \right\| \qquad [f \text{ streng monoton steigend auf } J] \\ &= \left\| \frac{3k^2 + 3k + 1}{2^{3n}} \right\| \\ &\leq \left\| \frac{3\,(2^n)^2 + 3\,(2^n) + 1}{2^{3n}} \right\| \end{aligned}$$

Der Grenzwert ist für jedes k offensichtlich 0, denn

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{3\,(2^n)^2 + 3\,(2^n) + 1}{2^{3n}} \right\| &= \lim_{n\to\infty} \left\| 3 \cdot 2^{-n} + 3 \cdot 2^{-2n} + 2^{-3n} \right\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \left\| 3 \cdot 2^{-n} \right\| + \lim_{n\to\infty} \left\| 3 \cdot 2^{-2n} \right\| + \lim_{n\to\infty} \left\| 2^{-3n} \right\| \\ &\quad \text{[Dreiecksungleichung]} \\ &= 0 \end{aligned}$$

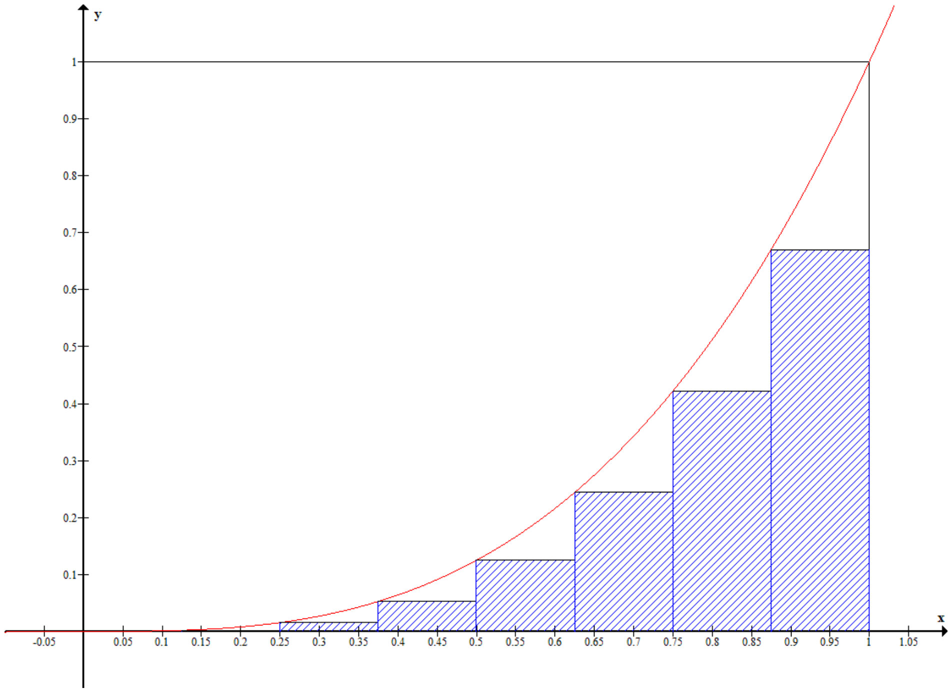

Abbildung 3: f_3

b) Mit

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

erhält man durch Umformen

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{2^n-1} \left(\frac{i}{2^n}\right)^3 \left(\frac{i+1}{2^n} - \frac{i}{2^n}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{2^n-1} \left(\frac{i}{2^n}\right)^3 \left(\frac{i+1-i}{2^n}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{i^3}{(2^n)^3} \left(\frac{1}{2^n}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{2^n-1} \left(\frac{1}{(2^n)^4}\right) i^3 \\
&= \frac{1}{2^{4n}} \sum_{i=0}^{2^n-1} i^3 \\
&= \frac{1}{2^{4n}} \left(\frac{(2^n-1)^2\,(2^n-1+1)^2}{4}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{4n}}\left(\frac{(2^n-1)^2\,(2^n)^2}{4}\right)\\
&= \frac{1}{2^{4n}}\left(\frac{(2^n-1)^2\,(2^{2n})}{4}\right)\\
&= \frac{1}{2^{2n}}\left(\frac{(2^n-1)^2}{4}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{2^n-1}{2^n}\right)^2\\
&= \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^2
\end{aligned}
$$

Mit der Bemerkung (27.14.3°) kann man dann wie folgt das gesuchte Integral berechnen

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^2\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\cdot\left(1-2\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{2n}}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}-\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^{2n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^{2n}}\\
&= \frac{1}{4}-0+0\\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Das Ergebnis entspricht dem Integral von $g_n(x)\big|_{[0,1]} = x^3\big|_{[0,1]}$, das sich aus der Stammfunktion $F(x) = \frac{x^4}{4}$ ergibt.

Varianten:

Einige weitere passende Funktionenfolgen sind $g_n : J \to \mathbb{R}, g(0) = 0$:

$$
g_n = \left(\frac{i}{a^n}\right)^3, x \in \left[\frac{i}{a^n}, \frac{i+1}{a^n}\right[, i = 0, 1, \ldots, a^n - 1, a \in \mathbb{Z}_{>1}
$$

IV Nutzen und Anwendungen

Durch die Teilaufgabe b) ist eine Anwendung der Funktionenfolgen gegeben. Es lässt sich das Integral einer Funktion f neu definieren, als Grenzwert der Integrale einer gegen die Funktion f gleichmäßig konvergierende Folge f_n von Treppenfunktionen.

Pascal Reisert · 10. Juli 2007