Musterlösung zu Blatt 11, Aufgabe 1

I Aufgabenstellung

Berechnen Sie folgende komplexe Kurvenintegrale (vgl. 30.19):

a) $\int_\gamma z^n \mathrm{d}z$ für $n \in \mathbb{N}, \gamma(t) = tb + (1-t)a, t \in [0,1]$ mit $a, b \in \mathbb{C}, a \neq b$,

b) $\int_\gamma z^m \mathrm{d}z$ für $m \in \mathbb{Z}, \gamma(t) = re^{it}, t \in [0, 2\pi]$ mit $r > 0$ fest ,

c) $\int_\gamma |z| \mathrm{d}z$ für $\gamma(t) = t, t \in [-1, 1]$,

d) $\int_\gamma |z| \mathrm{d}z$ für $\gamma(t) = e^{i(\pi - t)}, t \in [0, \pi]$.

II Beweisidee

„Worum geht's?“: Das komplexe Kurvenintegral und dessen Berechnung!

„Wie mach' ich das?“: Man benutze dazu den zitierten Punkt (30.19) des Sktipts [1] (Skript):

Satz (30.19.1°). Für ein Gebiet $\Omega \in \mathbb{C}$ und eine stetige Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ betrachte man auch das komplexe Kurvenintegral. Dabei wird in der Integraldefinition das Skalarprodukt $\langle , \rangle : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch die komplexe Multiplikation $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ersetzt. Für stückweise stetig differenzierbare Kurven $\gamma : [a, b] \to \Omega$ bedeutet das

$$\int_\gamma f \mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t$$

Damit sind alle notwendigen Hilfsmittel gegeben. Man verifiziere noch, dass γ_i in Teilaufgabe i) stückweise stetig differenzierbar ist. γ_a, γ_c sind Strecken und damit stetig differenzierbar, γ_b, γ_d als Exponentialfunktionen ebenfalls. Außerdem muss f stetig sein, was aber sowohl für die Potenzfunktionen, als auch für die Betragsfunktion gilt.

III Lösung

a) Wir benutzen (30.19.1°).

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f \mathrm{d}z &= \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 f(tb + (1-t)a) \cdot (tb + (1-t)a)'\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (tb + (1-t)a)^n \cdot (b-a)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (t(b-a) + a)^n \cdot (b-a)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

[1] Wurde in der Vorlesung nicht behandelt

Man verwende unter anderem den Binomischen Lehrsatz, wobei man vorher jedoch vereinfachen sollte

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f\mathrm{d}z &= \int_0^1 (t(b-a)+a)^n \cdot (b-a)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} ((b-a)t)^j a^{n-j} \right) \cdot (b-a)\mathrm{d}t \\
&= (b-a) \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (b-a)^j t^j a^{n-j} \right) \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

An dieser Stelle hat man jetzt nur noch ein Polynom, das zu integrieren ist.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f\mathrm{d}z &= \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t \\
&= (b-a) \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} ((b-a)^j a^{n-j}) t^j \right) \mathrm{d}t \\
&= (b-a) \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} ((b-a)^j a^{n-j}) \frac{t^{j+1}}{j+1} \Bigg]_0^1 \\
&= (b-a) \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} ((b-a)^j a^{n-j}) \frac{1^{j+1}}{j+1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{j} ((b-a)^j a^{n-j}) \frac{0^{j+1}}{j+1} \right) \\
&= (b-a) \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} ((b-a)^j a^{n-j}) \frac{1}{j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} ((b-a)^{j+1} a^{n-j}) \frac{1}{j+1}
\end{aligned}$$

Es folgen einige Umformungen, die ein schöneres Ergebnis liefern.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f\mathrm{d}z &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} ((b-a)^{j+1} a^{n-j}) \frac{1}{j+1} \\
&= \frac{n+1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} ((b-a)^{j+1} a^{n-j}) \frac{1}{j+1} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} ((b-a)^{j+1} a^{n-j}) \frac{n+1}{j+1} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(j+1)!(n-j)!} ((b-a)^{j+1} a^{n-j}) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(j+1)!(n+1-(j+1))!} ((b-a)^{j+1} a^{n-j})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j+1}((b-a)^{j+1}a^{n-j})\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j+1}((b-a)^{j+1}a^{n+1-(j+1)})\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j}((b-a)^{j}a^{n+1-j})\\
&= \frac{1}{n+1}\left(\underbrace{\binom{n+1}{0}b^{n+1-(n+1)}a^{n+1}}_{=a^{n+1}}-\binom{n+1}{0}b^{n+1-(n+1)}a^{n+1}\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j}((b-a)^{j}a^{n+1-(j)})\right)\\
&= \frac{1}{n+1}\left(-a^{n+1}+\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}((b-a)^{j}a^{n+1-(j)})\right)\\
&= \frac{1}{n+1}\left(-a^{n+1}+((b-a)+a)^{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}\left(-a^{n+1}+b^{n+1}\right)\\
&= \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}
\end{aligned}
$$

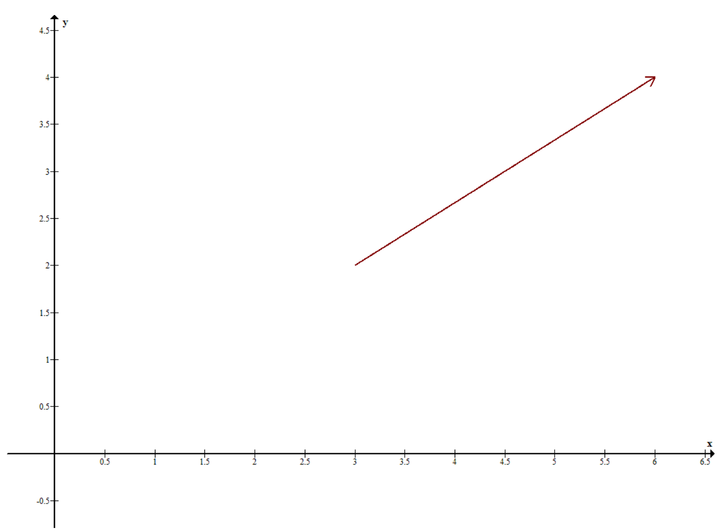

Abbildung 1: $a = 3 + 2i, b = 6 + 4i$

b) Zu beachten bei diesem Kurvenintegral ist, dass man eine Division durch 0 vermeidet:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f \mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} f(re^{it}) \cdot (re^{it})'\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} (re^{imt}) \cdot (rie^{it})\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} r^{m+1} i \cdot e^{i(m+1)t}\mathrm{d}t \\
&= r^{m+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t}\mathrm{d}t \\
&= r^{m+1} i \left. \frac{1}{m+1} e^{i(m+1)t} \right]_0^{2\pi} \quad \text{für } m \neq -1 \\
&= r^{m+1} i \left(\frac{1}{m+1} e^{i(m+1)(2\pi)} - \frac{1}{m+1} e^{i(m+1)0} \right) \\
&= r^{m+1} i \,(0-0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Für den Spezialfall $m = -1$ kann man das Integral ebenfalls berechnen

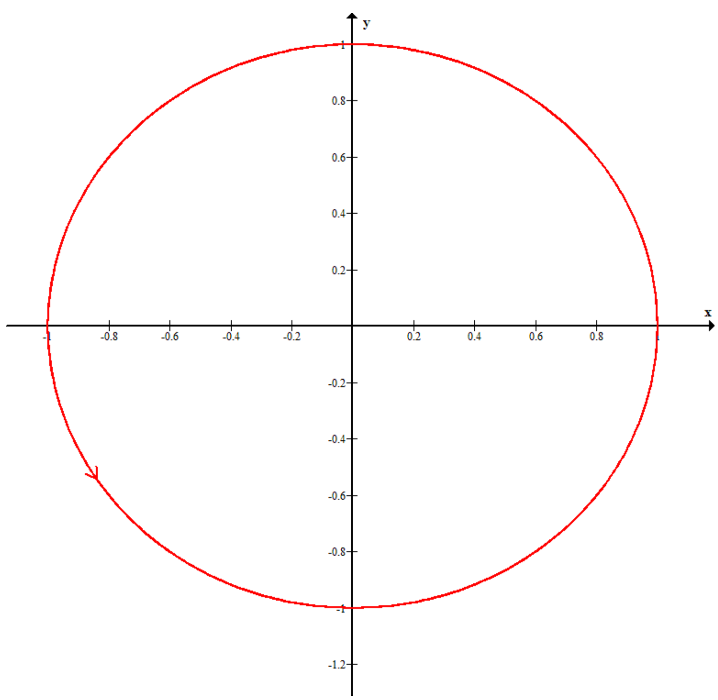

Abbildung 2: Einheitskreislinie bei positiven Umlaufsinn

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma f \mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{re^{it}}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} i\mathrm{d}t \\
&= i\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \\
&= i\ t]_0^{2\pi} \\
&= 2\pi i - 0 \\
&= 2\pi i
\end{aligned}
$$

[Der Spezialfall wird im Skript unter (30.19.3°) für beliebige Wege betrachtet].

c) Da t reell ist, vereinfacht sich der Betrag wesentlich

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma f \mathrm{d}z &= \int_{-1}^{1} f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} f(t)\cdot(t)'\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} |t|\cdot(1)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} |t|\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 |t|\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} |t|\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} (-t)\mathrm{d}t \\
&= \left.\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left.\frac{-t^2}{2}\right]_{-1}^0 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{0}{2} - \frac{0}{2} - (-\frac{(-1)^2}{2}) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

d) Um im Folgenden den Betrag berechnen zu können, muss man sich klar machen, dass der Betrag eines Punktes auf der Einheitskreislinie gerade 1 ist, denn es wird entlang selbiger integriert, auch wenn sie im Uhrzeigersinn durchlaufen wird, mit Anfangspunkt -1. Man kann

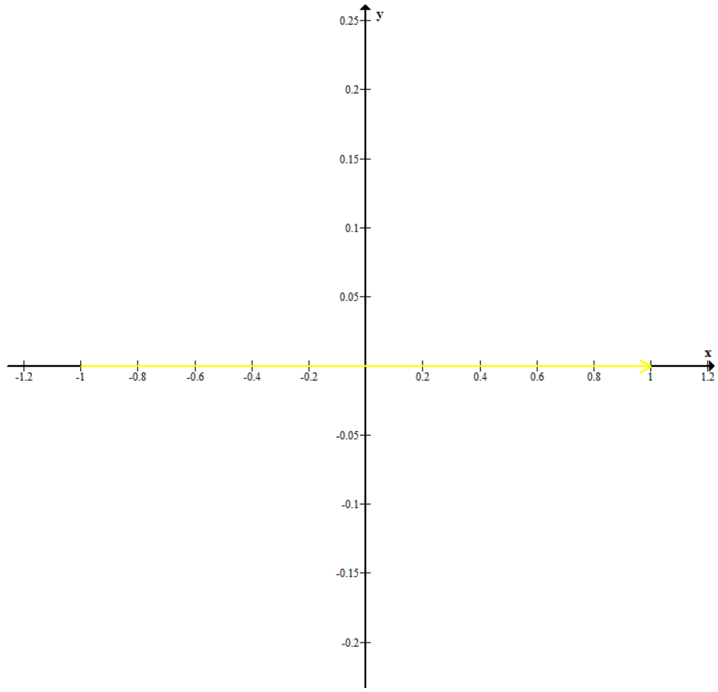

Abbildung 3: $\gamma(t) = t, t \in [-1, 1]$

die Ableitung aber auch umgehen, wenn man zunächst $f(\gamma(t))$ berechnet.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f \mathrm{d}z &= \int_0^\pi f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi f(e^{i(\pi-t)})\gamma'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi |e^{i(\pi-t)}|\gamma'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi |e^{i\pi}e^{-it}|\gamma'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi |\underbrace{e^{i\pi}}_{=-1}||\underbrace{e^{-it}}_{=\text{Kreislinie}}|\gamma'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi 1 \cdot 1 \cdot \gamma'(t))\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\pi \gamma'(t))\mathrm{d}t \\
&= \gamma(t)]_0^\pi \\
&= e^{i(\pi-t)}\Big]_0^\pi \\
&= e^{i(\pi-\pi)} - e^{i(\pi-0)} \\
&= 1 - (-1) \\
&= 2
\end{aligned}$$

Anmerkungen

Die Teilaufgabe a) lässt sich wesentlich vereinfachen, sofern man die komplexe Substitutionsregel zur Verfügung hat. Dazu muss man jedoch wissen, dass $f(z) = z^n$ holomorph (d.h. komplex differenzierbar) ist. Dann ist $\int_0^1 (\gamma(t))^n \gamma'(t)\mathrm{d}t = \int_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} z^n \mathrm{d}z = \int_{(b-a)0-a}^{(b-a)1-a} z^n \mathrm{d}z = \int_a^b z^n \mathrm{d}z = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$.

Der Spezialfall von Teilaufgabe b) ist der klassische Beweis dafür, dass die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ keine auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definierte Stammfunktion besitzt. Es wird in der Funktionentheorie allgemein gezeigt, dass für jede Funktion $f(z)$, die eine Stammfunktion auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ besitzt, das Kurvenintegral entlang eines geschlossenen Weges (d.h. Anfangs- und Endpunkt sind gleich, z.B. einfach durchlaufene Einheitskreislinie) stets 0 ist. Der Logarithmus bildet demnach keine Stammfunktion zu $f(z) = \frac{1}{z}$ auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, nährt man sich nämlich der negativen reellen Achse an, so macht der Logarithmus einen Sprung um 2π. Sei $a < 0$ und reell:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \mathrm{Im}(x) > 0}} \log z = \log |a| + \pi i$$
$$\lim_{\substack{x \to a \\ \mathrm{Im}(x) < 0}} \log z = \log |a| - \pi i$$

IV Nutzen und Anwendungen

Die Aufgabe stellt einen Ausflug in die Funktionentheorie dar. Diese behandelt allgemein die Frage, wann Funktionen komplex-differenzierbar (holomorph bzw. analytisch) sind, wann eine Stammfunktion existiert, usw. Insbesondere finden sich hier auch die komplexen Kurvenintegrale.

Pascal Reisert · 10. Juli 2007