Musterlösung zu Blatt 10, Aufgabe 3

I Aufgabenstellung

a) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ das Gebiet $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ und $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld

$$F(x,y) = \frac{(-y,x)}{x^2+y^2}.$$

Bestimmen Sie ein Potential $U : \Omega \to \mathbb{R}$ zum Vektorfeld F.
b) Zeigen Sie, dass es zu jeder geschlossenen Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass

$$\int_\gamma F\ dx = 2\pi k.$$

II Beweisidee

„Worum geht's?“: Die Aufgabenstellung dreht sich diesmal um die Begriffe „Kraftfeld“, „Potential“ und „Wegintegral“/„Kraftintegral“ (hier wird ausschließlich der erste Begriff verwendet). Dabei ist ein Kraftfeld eine Abbildung, die jedem Ort eines bestimmten Gebietes (ein „Gebiet“ ist eine offene, kurvenzusammenhängende Untermenge - praktisch immer - eines $\mathbb{R}^n$) einen (Kraft-)Vektor zuweist, also eine Abbildung der Art $F : \Omega \to \mathbb{R}^n, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, ein Potential dagegen hat die Form $U : \Omega \to \mathbb{R}$, gibt also für das selbe Gebiet Skalare (Zahlenwerte) zurück; der Zusammenhang der beiden besteht nun darin, dass die Koordinaten des Kraftfeldes die partiellen Ableitungen des Potentials sind.

„Wie mach' ich das?“: Mit der letzten Aussage ist auch schon das Wesentliche zur a) gesagt. Wir kennen mit F die partiellen Ableitungen von U, können also in jeder Koordinate (hier sind es ja nur zwei) integrieren und erhalten das Potential - bis auf (bei jedem Integrieren) eine von der jeweiligen Koordinate unabhängigen Funktion (in der aber dann alle anderen Koordinaten drinstecken können), die beim partiellen Ableiten verschwindet. Wenn (und nur dann, wenn) diese Funktionen so gewählt werden können, dass bei jedem Integrieren effektiv die gleiche Funktion als Potential folgt, existiert dieses. Im einfachsten Fall sind die zusätzlichen Funktionen Konstanten, die passend gewählt werden müssen - aber ganz so einfach ist es hier leider nicht. Wir werden sehen, dass die Definitionsbereiche bei der Bestimmung des Potentials eine wichtige Rolle spielen wird, was...
...dann auch bei der b) die entscheidende Idee ist. Hier stellt sich die Frage, wie man ein Wegintegral für eine Kurve in einem Potential bestimmt, das für verschiedene Definitionsbereiche verschieden ausfällt. Die Intuition legt nahe, eine solche Funktion zu zerlegen und auf unsere

Intuition dürfen wir hier auch hören.

„Wie komm' ich drauf?“: Ok, Intuition ist gut, aber sicherer sind wie bisher immer die Definitionen. Wenigstens bei Aufgabenteil a) sollte man damit schon ganz gut ans Ziel kommen. Bei der b) liegt die Schwierigkeit (nach dem intuitiven Initialmoment) wohl in der Anschauung, weshalb eine Skizze, wenn nicht notwendig, so doch sehr hilfreich ist.

III Lösung

a) Für das gesuchte Potential $U : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_x = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad ,$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = F_y = \frac{x}{x^2+y^2} \quad .$$

Wird beides integriert (nach x bzw. y), so folgt:

$$\begin{aligned} U &= \int \frac{-y}{x^2+y^2} dx = \int \frac{-y}{y^2\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2+1\right)} dx = \int \frac{-1}{y} \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}\, y\, d\left(\frac{x}{y}\right) = -\int \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1} d\left(\frac{x}{y}\right) \\ &=^{(!)} \int \frac{x}{x^2+y^2} dy = \int \frac{1}{x} \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}\, x\, d\left(\frac{y}{x}\right) = \int \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1} d\left(\frac{y}{x}\right) \quad , \end{aligned}$$

weiter mit dem Integral $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + C$:

$$\begin{aligned} U &= -\arctan\frac{x}{y} + g(y) \\ &=^{(!)} \arctan\frac{y}{x} + h(x) \quad . \end{aligned}$$

wobei die Integrationskonstanten in den Funktionen g und h enthalten sind.
Bis zu dieser Stelle lief das Berechnen des Integrals vollkommen unabhängig vom Definitionsbereich ab, die Bedingung $y > 0$ aus der Aufgabenstellung wurde nicht verwendet, und das Potential in dieser allgemeinen Form hat Gültigkeit auf ganz $\mathbb{R}^2$. Die Bestimmung der Potentialfunktion ist jedoch noch nicht abgeschlossen, es bleiben noch die Funktionen $g(y)$ und $h(x)$ zu bestimmen, die beim partiellen Differenzieren nach x bzw. y wegfallen, jedoch geschickt gewählt erst das (bis auf skalare Integrationskonstante „C“) eindeutige Potential ermöglichen.

Es soll also gelten:

$$\begin{aligned} U &= -\arctan\frac{x}{y} + g(y) = \arctan\frac{y}{x} + h(x) \\ &\Rightarrow \arctan\frac{x}{y} + \arctan\frac{y}{x} = g(y) - h(x) \quad , \end{aligned}$$

wobei jetzt eine Beziehung über die Arcustangensfunktion zur Anwendung kommt:

$$\arctan t + \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2} \cdot \begin{cases} 1 & t > 0 \\ (-1) & t < 0 \end{cases} .$$

Es lassen sich nun (ganz allgemein und bereits im Vorgriff auf Aufgabenteil b) für das hier relevante Arcustangens-Argument $\frac{x}{y}$ vier Fälle unterscheiden:

x	y	$\frac{x}{y}$	$\arctan \frac{x}{y} + \arctan \frac{y}{x}$ $(= g(y) - h(x))$
< 0	< 0	> 0	$\frac{\pi}{2}$
< 0	> 0	< 0	$-\frac{\pi}{2}$
> 0	< 0	< 0	$-\frac{\pi}{2}$
> 0	> 0	> 0	$\frac{\pi}{2}$

Unterscheidet man jetzt die vier Fälle $x < 0$, $x > 0$, $y < 0$, $y > 0$, so können die (nur von y bzw. x abhängigen) g und h bestimmt werden zu:

Gebiet	$g(y)$	$-h(x)$	$U(x, y) = ...$
$x < 0$	$\frac{\pi}{2} \begin{cases} 1 & y < 0 \\ (-1) & y > 0 \end{cases}$	0	$-\arctan \frac{x}{y} + g(y) = \arctan \frac{y}{x}$
$x > 0$	$\frac{\pi}{2} \begin{cases} (-1) & y < 0 \\ 1 & y > 0 \end{cases}$	0	$-\arctan \frac{x}{y} + g(y) = \arctan \frac{y}{x}$
$y < 0$	0	$\frac{\pi}{2} \begin{cases} 1 & x < 0 \\ (-1) & x > 0 \end{cases}$	$-\arctan \frac{x}{y} = \arctan \frac{y}{x} + h(x)$
$y > 0$	0	$\frac{\pi}{2} \begin{cases} (-1) & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$	$-\arctan \frac{x}{y} = \arctan \frac{y}{x} + h(x)$

,

so dass für jeden der vier Definitionsbereiche ein Potential gefunden wurde. Der Einfachheit halber sollen die Formulierungen $\arctan \frac{y}{x}$ als Potential für $x > 0$ und $x < 0$, $-\arctan \frac{x}{y}$ für $y > 0$ und $y < 0$ gewählt werden.

Für den Definitionsbereich Ω folgt damit das Potential $U(x, y) = -\arctan \frac{x}{y}$.

b) Wir haben in a) schon wichtige Vorarbeit geleistet, insofern vier Potentiale für alle Halbebenen der Ebene bestimmt wurden, die durch die (x- und y-)Koordinatenachsen begrenzt werden. Wir wollen nun eine gegebene geschlossene Kurve so geschickt zerlegen, dass wir abschnittsweise mithilfe der gegebenen Potentiale die Wegintegrale berechnen können.

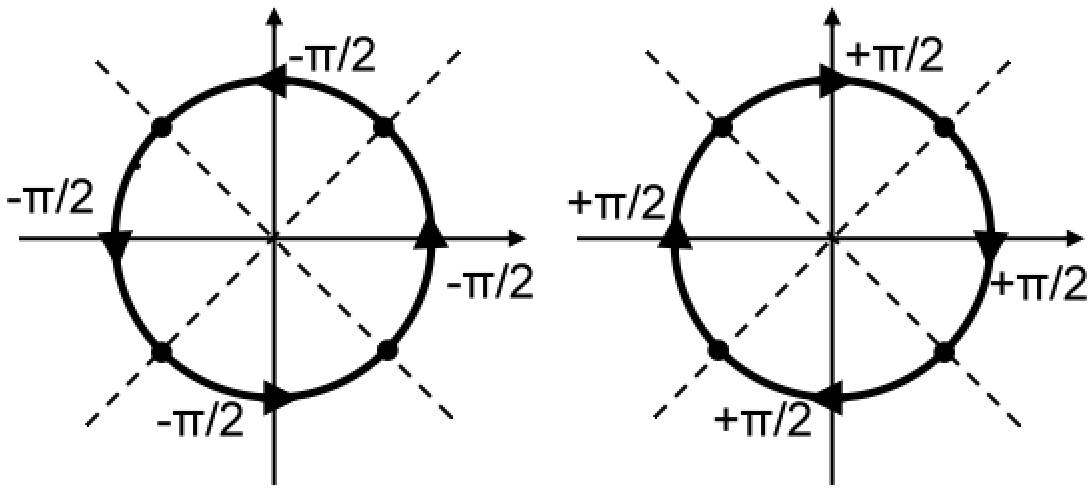
Dazu bieten sich etwa die beiden Winkelhalbierenden der Koordinatenachsen $x = y$ und $x = -y$ an. Wir bestimmen also die Stellen $t_1, ..., t_n$ und Punkte $\gamma(t_1), ..., \gamma(t_n)$ der Kurve γ, an denen sie eine der Winkelhalbierenden schneidet, in der Reihenfolge des Kurvenverlaufs.

Es können zunächst zwei wichtige Aussagen getroffen werden: zum Ersten, dass die Kurve nie durch den Punkt $(0, 0)$ verläuft, also die Winkelhalbierenden stets in Punkten jenseits des Ur-

sprungs schneidet, zum Zweiten, dass die Kurve folglich nie dieselbe Winkelhalbierende (also etwa $x = y$) zweimal hintereinander in verschiedenen gegenüberliegenden Quadranten (hier den 1. und 3.) schneiden kann, ohne die andere (in diesem Fall $x = -y$) zu schneiden. Zwei aufeinanderfolgende Stellen t_k und t_{k+1} $(1 \leq k < n)$ müssen also in zwei (oder im Extremfall nur einem) aneinander grenzenden Quadranten des Koordinatensystems liegen (der Fall, dass sie in diametralen, nicht aneinander grenzenden, liegen wurde eben ja ausgeschlossen).
Somit gibt es dann aber auch für zwei solche aufeinanderfolgenden t_k, t_{k+1} stets eine Koordinatenhalbebene, die Vereinigung der beiden aneinander grenzenden Quadranten nämlich, für die in a) ein Potential gefunden wurde, gegeben durch eine der Funktionen $U(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ oder $U(x, y) = -\arctan \frac{x}{y}$. Um also das Wegintegral zwischen den Punkten $\gamma(t_k)$ und $\gamma(t_{k+1})$ zuberechnen, muss die Differenz der Potentialwerte an den Stellen $\gamma(t_k)$ und $\gamma(t_{k+1})$ ermittelt werden; da es sich dabei aber um Schnittpunkte mit verschienden Winkelhalbierenden handelt, lässt sich die Rechnung reduzieren auf:

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma(t_k)}^{\gamma(t_{k+1})} F\, dx &= U(\gamma(t_{k+1})_x, \gamma(t_{k+1})_y) - U(\gamma(t_k)_x, \gamma(t_k)_y) = ... \\
&... \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{2} && (1) \\
&... \arctan(-1) - \arctan(1) = -\frac{\pi}{2} && (2) \\
&... -\arctan(1) + \arctan(-1) = -\frac{\pi}{2} && (3) \\
&... -\arctan(-1) + \arctan(1) = \frac{\pi}{2} \quad , && (4)
\end{aligned}
$$

wobei die Gleichungen (1)/(2) und (3)/(4) die Potentiale $\arctan \frac{y}{x}$ bzw. $-\arctan \frac{x}{y}$ verwenden und jeweils die zwei Fälle unterscheiden, die sich durch die Reihenfolge der Schnittpunkte mit den verschiedenen Winkelhalbierenden ($x = y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{x} = 1$, $x = -y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{x} = -1$) ergeben.
Es wurde damit also gezeigt, dass das Wegintegral zwischen zwei Stellen t_k und t_{k+1} gleich $\pm\frac{\pi}{2}$ ist, und zwar in folgender Weise (die entsprechende Fallunterscheidung wird hier nicht ausgeführt):



Nun muss γ als geschlossene Kurve in einem der Quadranten, die durch die Winkelhalbierenden aus der Ebene geschnitten werden, beginnen und in demselben auch enden. Wie jetzt aber erkennbar wird, ist jeder derartige Weg mit einem Wegintegral von $2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ verbunden. Verlässt der Weg den Quadranten nämlich nicht, so liegt eine geschlossene Kurve mit Potential (also im konservativen Kraftfeld) vor, deren Wegintegral 0 ist, für jeden Weg, der den ursprünglichen Quadranten verlässt und durch andere hindurch dorthin zurückkehrt, ergibt sich als Summe ebenfalls 0 oder $\pm 2\pi$ (falls ein „Umlauf" um den Ursprung vollzogen wird), für mehrere „Umläufe" entsprechend ein $2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Johannes Flake · 10. Juli 2007