Musterlösung zu Blatt 10, Aufgabe 1

I Aufgabenstellung

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$, $X \neq \emptyset$ heißt zusammenhängend, wenn für je zwei nichtleere offene Teilmengen $U, V \in \mathcal{T}$ mit $X = U \cup V$ gilt $U \cap V \neq \emptyset$.

a) Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ genau dann zusammenhängend ist, wenn X und $\emptyset$ die einzigen Teilmengen von X sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

b) Es seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Der topologische Raum X sei zusammenhängend. Zeigen Sie, daß auch $f(X)$ zusammenhängend ist.

c) Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und I eine nichtleere Indexmenge. Für jedes $i \in I$ sei $A_i \in X$ zusammenhängend und es gelte $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{i \in I} A_i$ zusammenhängend ist.

II Beweisidee

„Worum geht's?“: Der Text der Aufgabenstellung entwirft ein typisches mathematisches Arbeitsfeld, in diesem Fall sogar ein geradezu klinisch präpariertes. In ein (idealerweise gut) bekanntes Szenarium aus grundlegenden Definitionen und ersten Sätzen (hier: die Anfänge der Topologie mit ihrer Definition der offenen Mengen) hinein erfolgt die Setzung einer neuen Definition („zusammenhängende Menge'). Diese neue Definition soll nun, wo immer möglich, in den Kontext der bestehenden eingeordnet und, soweit möglich, auf diese zurückgeführt werden.

Eine natürliche Schwierigkeit des Lösenden ist dabei, möglichst ausschließlich die für die Lösung des Problems relevanten Aussagen aus dem unter Umständen weitläufigen zugrunde liegenden Szenarium auszuwählen, hier kann ihm nur die Anschauung der logischen Bezüge helfen, die er sich nur durch unnachgiebiges Versuchen erarbeiten kann. Eine Topologie zu einer Menge X wird durch die Menge der *offenen* Teilmengen von X definiert, welche mit dem Symbol $\mathcal{T}$ bezeichnet wird. $(X, \mathcal{T})$ heißt dann der „topologische Raum“. „*Abgeschlossen*“ heißen die Komplemente der offenen Mengen, zu jeder offenen Menge U ist also $V := X \setminus U$ abgeschlossen. Über stetige Abbildungen ist unter anderem bekannt, dass die Urbilder offener Mengen offen sind, natürlich noch viel mehr, aber das reicht schon. Und in einer Relativtopologie, also der Topologie für eine Untermenge $A \subset X$, sind die offenen Mengen die Schnitte der offenen Menge aus X mit der Untermenge.

„Wie mach' ich das?": An manchen Tagen - und zu manchen Aufgaben - schreitet man früher oder später zu Widerspruchsbeweisen. Weil dies so eine Aufgabe ist, wird die Frage des Tages: Was ist ein Widerspruchsbeweis?
Auch wenn das zunächst im Sinne der Aufgabenstellung nicht dienlich erscheinen mag, nehme man für einen Widerspruchsbeweis genau das Gegenteil der Aussage an, die man eigentlich beweisen möchte. Weil man sowieso keine Chance hat, diese Annahme zu beweisen, zeigt man, dass sie falsch ist - und hat damit sein Ziel erreicht. Wichtig ist der letzte Schritt, der im Folgenden beabsichtigterweise durch seine Penetranz auffällt, nämlich die entsprechende Feststellung, die Annahme widerlegt und damit ihr Gegenteil bewiesen zu haben.

„Wie komm' ich drauf?": An dieser Stelle wurden in den Musterlösungen schon einige Tipps gegeben, die hier allesamt bekräftigt, nicht aber wiederholt werden sollen. Es handelt sich um eine 1. Aufgabe, also machen wir die Sache nicht zu kompliziert.

III Lösung

a) Es gibt zwei Richtungen zu beweisen. Sei zunächst $(X, \mathcal{T})$ ein zusammenhängender topologischer Raum, es gilt also:

$$\forall\, U, V \in \mathcal{T},\ U \neq \emptyset \neq V:\ U \cup V = X \Rightarrow U \cap V \neq \emptyset. \tag{1}$$

Angenommen, es gäbe nun in X eine zugleich offene und abgeschlossene Teilmenge Y, die von X und $\emptyset$ verschieden ist. Weil Y abgeschlossen ist, muss dann auch $Y' := X \setminus Y$ offen sein, weil Y weder X noch $\emptyset$ ist, kann auch das Komplement Y' keine dieser beiden Teilmengen sein und es gilt für Y, Y':

$$Y, Y' \in \mathcal{T},\ Y \neq \emptyset \neq Y',\ Y \cup Y' = X \text{ aber } Y \cap Y' = \emptyset$$

was ein Widerspruch zu (1) ist.
Die Annahme ist also falsch, es gibt keine zugleich offene und abgeschlossene Teilmenge außer X und $\emptyset$.
Die Rückrichtung: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, in dem X und $\emptyset$ als einzige Teilmengen sowohl offen als auch abgeschlossen sind. Angenommen, X sei nicht zusammenhängend, gäbe es also offene Mengen

$$U, V \in \mathcal{T},\ U \neq \emptyset \neq V:\ U \cup V = X,\ U \cap V = \emptyset.$$

Aus den letzten beiden Bedingungen $U \cup V = X,\ U \cap V = \emptyset$ folgt dann aber $U = X \setminus V$ und umgekehrt; U und V sind Komplemente in X, zwei disjunkte Teilmengen also, die vereinigt

die gesamte Menge darstellen. Wenn aber beide Menge offen und zueinander Komplemente sind, müssen sie auch beide abgeschlossen sein, weil keine der Menge $\emptyset$ ist, kann auch keine (als Komplement) X sein. Somit gibt es dann aber schon zwei Teilmengen U, V, welche im Widerspruch zur Annahme stehen, X und $\emptyset$ seien die einzigen offenen und zugleich abgeschlossenen Teilmengen.
Die Annahme ist also falsch, X ist zusammenhängend.

b) Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ die topologischen Räume. Wie in (a) gezeigt, kann die Aussage, dass nämlich $f(X)$ zusammenhängend ist, bewiesen werden mit der äquivalenten Aussage, die einzigen offenen und abgeschlossenen Mengen in $f(X)$ sind $f(X)$ und $\emptyset$.
Angenommen, es gäbe in $f(X)$ eine zugleich offene und abgeschlossene Menge U', die weder $f(X)$ noch $\emptyset$ sei; für ihr Komplement $V' := f(X) \setminus U'$ gilt dann dasselbe. Weil die Abbildung f stetig ist, muss das Urbild von U' in X, $U := f^{-1}(U') \subset X$, ebenfalls offen sein, es kann sich auch nach den eben festgesetzten Erkenntnissen weder um die leere Menge $\emptyset$ noch um ganz X handeln (deren Bilder ja $\emptyset$ bzw. $f(X)$ wären). Genauso muss das Urbild von V' in X, $V := f^{-1}(V') \subset X$ offen und verschieden von X und $\emptyset$ sein. Schließlich sind dann aber U und V disjunkt - gäbe es ein gemeinsames Element beider Menge, so müsste dieses sowohl in U' als auch in V' abgebildet werden, die aber disjunkt sind - und sie stellen vereinigt die gesamte Menge X dar - gäbe es nämlich ein Element in X, was in keiner der Menge enthalten wäre, so läge sein Bild weder in U' noch in V', also wegen $U' \cup V' = f(X)$ auch nicht in $f(X)$. Damit, zusammengefasst:

$$U, V \in \mathcal{T}_X,\ U \neq \emptyset \neq V,\ U \cup V = X,\ U \cap V = \emptyset,$$

wäre aber X nicht zusammenhängend, was ein Widerspruch ist.
Die Annahme ist also falsch, die einzigen offenen und abgeschlossenen Mengen in $f(X)$ sind $f(X)$ und $\emptyset$ und $f(X)$ ist damit zusammenhängend.

c) Angenommen, A wäre (im topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$) nicht zusammenhängend, es gäbe zwei Teilmengen U und V mit:

$$U, V \in \mathcal{T},\ U \neq \emptyset \neq V,\ U \cup V = A,\ U \cap V = \emptyset.$$

Es folgt dann direkt, dass jeder Schnitt von U mit einem A_i in diesem $A_i \subset X$ offen (bezüglich der Relativtopologie) ist, diese Schnitte seien $U_i := U \cap A_i\ \forall i \in I$. Auch V hat Schnitte mit den A_i, diese seien $V_i := V \cap A_i\ \forall i \in I$ und sind genau wie die U_i offen. Weil U und V disjunkt sind und keinen Schnitt haben, muss das auch für alle U_i und V_i gelten: Da sie (U und V) vereinigt A ergeben, müssen sich nach

$$U_i \cup V_i = (U \cap A_i) \cup (V \cap A_i) = (U \cup V) \cap A_i = A \cap A_i = A_i$$

die Schnitte U_i und V_i auch zu A_i vereinigen. Es ist zugleich aber A_i zusammenhängend ($\forall i \in I$), also muss U_i oder V_i leer sein (sonst widerlegten sie ja genau die Definition von „zusammenhängend“ für A_i). A_i muss damit entweder U_i (als Komplement zu einem leeren V_i) oder V_i (umgekehrt) sein.

Es werde nun der Schnitt aller A_i betrachtet, der nach Voraussetzung nicht $\emptyset$ ist. Somit muss ein Element $x \in A$ in jedem A_i enthalten sein; dieses x muss, da U und V sich disjunkt zu A vereinigen, aber dann entweder in U oder in V enthalten sein. Wenn es nun in U ist, so muss nach dem eben Formulierten $A_i = U_i \ \forall i \in I$ sein, weil A_i gleich U_i oder V_i ist, x aber in jedem A_i und keinem V_i liegt; andererseits muss im umgekehrten Fall ($x \in V$) $A_i = V_i \ \forall i \in I$ richtig sein. Für die beiden Fälle ist dann aber

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} U_i = U \quad \Rightarrow \quad V = \emptyset$$

bzw.

$$A = \bigcup_{i \in I} V_i = V \quad \Rightarrow \quad U = \emptyset,$$

was ein Widerspruch ist.

Die Annahme ist also falsch, A ist zusammenhängend.

Johannes Flake · 10. Juli 2007