Musterlösung zu Blatt 9, Aufgabe 3

I Aufgabenstellung

Geben Sie jeweils ein Beispiel von Potenzreihen $\sum a_n T^n$ und $\sum b_n T^n$ an, sodass der Konvergenzradius

a) der Summe der Potenzreihen

b) des Cauchy-Produkts der Potenzreihen

größer ist als $\min\{\varrho_a, \varrho_b\}$, wobei ϱ_a der Konvergenzradius von $\sum a_n T^n$ und ϱ_b derjenige von $\sum b_n T^n$ ist.

II Beweisidee

„Worum geht's?": Offensichtlich soll man hier in jeder Teilaufgabe die Koeffizientenfolgen a_n und b_n so definieren, dass die Angaben in der jeweiligen Teilaufgabe erfüllt sind (Da es heißt „Geben Sie Beispiele ...", ist es wichtig, konkrete Beispiele zu nennen). Dass die so definierten Folgen „richtig" sind, ist natürlich zu zeigen.
Die Summe der Potenzreihen ist $\sum(a_n + b_n)T^n$, das Cauchy-Produkt $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (a_k b_{n-k}) T^n$ (siehe Vorlesung)

„Wie mach' ich das?": Das wichigste Werkzeug bei dieser Aufgabe ist der Satz von Hadamard, mit dessen Hilfe die Konvergenzradien berechnet werden können. Für den Konvergenzradius ϱ_a der Potenzreihe $\sum a_n T^n$ gilt z.B.:

$$\varrho_a = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}},$$

wobei wir $\varrho_a = 0$ für $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ und $\varrho_a = \infty$ für $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ setzen. Mit diesem Wissen kann man gezielt (siehe nächster Abschnitt) Beispiele ausprobieren. Falls man nicht gleich die Lösung erkennt, kommt man oft durch Korrektur der eigenen Denkfehler schnell auf den richtigen Zweig.

„Wie komm' ich drauf?": Wenn man versucht, den einfachsten Fall zu konstruieren, für den die Reihen die Aufgabenstellung sicher erfüllen (ohne dass man viel rechnen muss), kann man sehr schnell erkennen, dass es von Vorteil ist, wenn man versucht, ein Beispiel zu finden, sodass der Konvergenzradius der Summe bzw. des Produkts der Potenzreihen Unendlich ergibt, jedoch der Konvergenzradius von mindestens einer Reihe kleiner als unendlich ist. Der Rest ist dann relativ einfach: Man muss sich nur anhand des Satzes von Hadamard überlegen, welche Folgen a_n und b_n geeignet sind.

III Lösung

a) Eine Möglichkeit wäre (man kann unendlich viele Möglichkeiten finden, siehe Varianten): Sei $a_n := 2^n$ und $b_n := -2^n$ $\Rightarrow$ Für alle n gilt dann: $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|b_n|} = 2$, also

$$\varrho_a = \varrho_b = \frac{1}{\limsup 2} = \frac{1}{2} = \min\{\varrho_a, \varrho_b\}$$

Sei ϱ_{a+b} der Konvergenzradius der Summenreihe $\sum(a_n + b_n)T^n$. Dann ist für alle n aber $\sqrt[n]{|a_n + b_n|} = 0$ und somit

$$\varrho_{a+b} = \infty > \min\{\varrho_a, \varrho_b\}$$

Die Summe der Potenzreihen ist also überall konvergent, im Gegensatz zu den einzelen Potenzreihen.

b) Eine Möglichkeit wäre (man kann unendlich viele Möglichkeiten finden, siehe Varianten): Sei $a_n := 2^n$ und $b_n := 0$ $\Rightarrow$ Für alle n gilt dann: $\sqrt[n]{|a_n|} = 2$ und $\sqrt[n]{|b_n|} = 0$ $\Rightarrow$ $\varrho_a = \frac{1}{2}$ und $\varrho_b = \infty$, also

$$\min\{\varrho_a, \varrho_b\} = \frac{1}{2}$$

Sei ϱ_{ab} der Konvergenzradius der Cauchy-Produktreihe $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(a_k b_{n-k})T^n$. Wenn man nun für jedes n die jeweilige innere Summe als Koeffizient von T^n betrachtet, berechnet sich ϱ_{ab} wie folgt: $\sqrt[n]{|\sum_{k=o}^{n} a_k b_{n-k}|} = \sqrt[n]{0} = 0$, also

$$\varrho_{ab} = \infty > \frac{1}{2}$$

Das Produkt der Potenzreihen ist also überall konvergent, im Gegensatz zu $\sum a_n T^n$.

Varianten: a) Man muss natürlich nicht zwingenderweise $a_n := 2^n$ und $b_n := -2^n$ setzen. Man kann auch eine beliebige Folge a_n wählen, sodass $0 < \varrho_a < \infty$ ist. und $b_n := -a_n$ für alle n setzen. Damit ist (wegen der Begtragsstriche) automatisch $\varrho_b = \varrho_a$, aber $a_n + b_n$ stets 0, womit $\varrho_{a+b} = \infty > \varrho_a = \min\{\varrho_a, \varrho_b\}$ ist.

b) Auch hier kann man andere Beispiele finden: Für $b_n := 0 \,\forall\, n$ z.B. kann man jede beliebige Folge a_n nehmen, solange $\varrho_a < \infty$, also solange $\sqrt[n]{|a_n|}$ keine Nullfolge ist.

IV Variationen, Verallgemeinerungen, Abschwächungen

Zwei interessante Fragestellungen:
Ist es möglich,

a) Beispiele zu finden, sodass ϱ_{a+b} bzw. ϱ_{ab} kleiner als $\min\{\varrho_a, \varrho_b\}$ ist?

b) für jede reelle Zahl k Beispiele zu finden, sodass ϱ_{a+b} bzw. ϱ_{ab} gleich $k \cdot \min\{\varrho_a, \varrho_b\}$ ist?

Hierzu versprechen vor allem konstruktive Beweisansätze eine Lösung.

V Nutzen & Anwendungen

Diese Aufgabe vertieft das Verständnis des Begriffs „Konvergenzradius“ und zeigt, wie sich das Konvergenzverhalten ändert, wenn man zwei Reihen addiert oder multipliziert.

Yilin Xu, 17. März 2007