Musterlösung zu Blatt 6, Aufgabe 2

I Aufgabenstellung

Es sei $F = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Raum aller reellen, mit $\mathbb{N}$ induzierten Folgen. Weiter bezeichne N alle Nullfolgen, K alle konvergenten Folgen und B alle beschränkten Folgen.

a) Zeigen Sie, dass F mit der koordinatenweisen Addition $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$ und der skalaren Multiplikation $\lambda(a_n) = (\lambda a_n)$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.
b) Zeigen Sie, dass $l : K \to \mathbb{R}$ definiert durch $l(x_n) := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ eine lineare Abblidung ist, und bestimmen Sie deren Kern.

Einen Vektorraum A über $\mathbb{R}$ nennt man *Algebra*, wenn für je zwei Elemente $a, b \in A$ ein Produkt ab so definiert ist, dass ab stets wieder in A liegt und folgende Rechenregeln für sämtliche $a, b, c \in A$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten:

- $a(bc) = (ab)c$,
- $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$,
- $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$.

Jede nichtleere Teilmenge U einer Algebra A, zu der mit $a, b \in U$ auch stets die Summe $a + b$, jedes Vielfache λa $(\lambda \in \mathbb{R})$ und das Produkt ab gehört, ist selbst eine Algebra; sie wird eine *Unteralgebra* von A genannt. Eine solche Unteralgebra U heißt ein *Ideal* in A, falls $ab \in U$ und $ba \in U$ für alle $a \in U$ und $b \in A$ gilt

c) Zeigen Sie, dass F bezüglich der koordinatenweisen Multiplikation $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$ eine Algebra ist.
d) Zeigen Sie, dass B eine Unteralgebra von F, K eine Unteralgebra von B und N eine Unteralgebra von K ist.
e) Ist B ein Ideal in F?
f) Ist K ein Ideal in B oder in F?
g) Ist N ein Ideal in K, in B oder in F?

II Beweisidee

„Worum geht's?": Zunächst soll „F ist Vektorraum" nachgewiesen werden. Bei Teilaufgabe b) soll bewiesen werden, dass eine Abbildung l linear ist, also $\forall x, y \in F : l(x + y) = l(x) + l(y)$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R} : l(\lambda x) = \lambda l(x)$ gilt. Der Kern einer linearen Abbildung $l : K \to \mathbb{R}$ ist $\ker l = \{k \in K | l(k) = e_+ = 0\}$. In c) muss bewiesen werden, dass F eine Algebra ist, also neben der Vektorraumstruktur auch noch bezüglich der Multiplikation abgeschlossen ist und die genannten Regeln erfüllt. In Teilaufgabe d) soll in verschiedenen Fällen nachgeprüft werden, dass eine Teilmenge eine Unteralgebra ist. Für die letzten drei Teilaufgaben e), f) und g) wird der Begriff des Ideals eingeführt. Hiermit kann gezeigt werden, welche Teilmengen ein Ideal in ihrer Obermenge darstellen.

„Wie mach' ich das?": Für a) reicht es die Axiome eines Vektorraums abzuprüfen. Für Teil b) kann man zunächst die Definition einer linearen Abbildung nachprüfen. Die Bestimmung des Kerns kann mit der gegebenen Definition problemlos bewältigt werden. Teilaufgabe c) und d) können durch Abprüfen der Axiome einer Unteralgebra bewältigt werden (siehe Aufgabenstellung). Bei den Aufgabenteilen e), f) und g) hingegen muss man sich zunächst vergewissern, ob die Teilmenge tatsächlich ein Ideal ist und dann entsprechend einen Beweis oder ein Gegenbeispiel finden.

„Wie komm' ich drauf?": Die Aufgabenstellung von Teil b) beinhaltet einen Grenzwert. Man mache sich klar, was aus der Vorlesung über Grenzwerte bekannt ist, um die Aufgabe zu lösen. Fasst man die abstrakte Definition des Kerns in Worte, so erhält man z.B.: Der Kern ist die Menge der Folgen, deren Grenzwert 0 ist.
Besonders zu beachten ist beim Beweis, dass eine Teilmenge eine Unteralgebra ist, dass man die Eigenschaften der Teilmenge auch verwendet. Bekannte Kriterien oder auch Rechenregeln helfen, eine Lösung zu finden. Zu beachten ist, dass zur Beschränktheit oder Konvergenz nur äquivalente Aussagen, wie z.B. die Existenz eines maximalen und minimalen Elements, oder die Existenz eines Grenzwerts verwendet werden und nicht „nur" hinreichende Kriterien, da diese von verschiedenen konvergenten oder beschränkten Folgen nicht erfüllt werden müssen. Beim Nachweis oder Widerlegen der Idealeigenschaften ist es sinnvoll die Eigenschaften einer Obermenge auf eine andere zu übertragen, falls möglich. So ist zum Beispiel für Algebren $X \subset Y \subset Z$ und $X \subset Z$ Ideal auch schon $X \subset Y$ Ideal.

III Lösung

a) Nachprüfen der Vektorraumaxiome:
0_F als konstante Folge liegt in F und es ist $(a_n) + 0_F = (a_n)$. Zu jeder Folge (a_n) liegt auch die Folge $(-a_n)$ in F und es ist $(a_n) + (-a_n) = 0_F$. Die Addition ist kommutativ, da sie (in der Berechnung der Folgeglieder der Summenfolge) letztlich auf die Addition in $\mathbb{R}$ hinausläuft. Daher ist $(F, +)$ eine abelsche Gruppe mit 0_F als neutralem Element und $(-a_n)$ als inversem Element.
Für zwei beliebige reelle Zahlen λ und μ und zwei Folgen (a_n) und (b_n) in F gilt: Distributivität: $(\lambda + \mu)(a_n) = ((\lambda + \mu)a_n) = (\lambda a_n + \mu a_n) = (\lambda a_n) + (\mu a_n)$ sowie $\lambda((a_n) + (b_n)) = \lambda(a_n + b_n) = (\lambda(a_n + b_n)) = (\lambda a_n + \lambda b_n) = (\lambda a_n) + (\lambda b_n)$.
Assoziativität: $\lambda(\mu(a_n)) = (\lambda\mu)(a_n)$ nach vorgegebener Rechenregel
Einselement: $1 \cdot (a_n) = (a_n)$

b) Nach Vorlesung ist $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n)$ und $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda \lim_{n\to\infty}(a_n)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ für zwei konvergente Folgen (a_n) und (b_n). Da l jede konvergente Folge auf ihren Grenzwert abbildet, gilt für $(a_n), (b_n) \in K$ folgendes:
$l(a_n + b_n) = l(a_n) + l(b_n)$, $l(\lambda a_n) = \lambda l(a_n)$ und $l(0_K)$=0, wobei 0_K auch hier die konstante

Folge mit 0 als Folgegliedern ist. $\Rightarrow l$ ist eine lineare Abbildung.
Im Kern sind gerade die Elemente (a_n), für die $l(a_n) = 0$ ergibt, deren Grenzwert also Null ist. So sind aber gerade die Nullfolgen definiert. Also ist $\ker(l) = N$.

c) In a) wurde bereits gezeigt, dass F ein Vektorraum ist. Das Produkt $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n b_n)$ ist natürlich wieder eine reelle, mit $\mathbb{N}$ induzierte Folge, womit es in F liegt. Außerdem sind mit den vorgegebenen Rechenregeln folgende Aussagen richtig ($a_n, b_n \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$):

- $(a_n) \cdot ((b_n) \cdot (c_n)) = ((a_n) \cdot (b_n)) \cdot (c_n)$
- $(a_n) \cdot ((b_n) + (c_n)) = (a_n) \cdot (b_n) + (a_n) \cdot (c_n)$, $((a_n) + (b_n)) \cdot c_n = (a_n) \cdot (c_n) + (b_n) \cdot (c_n)$
- $\lambda((a_n) \cdot (b_n)) = (\lambda a_n) \cdot (b_n) = (a_n) \cdot (\lambda b_n)$.

Damit ist F eine Algebra.

d) $B \subset F$ ist offensichtlich Teilmenge. Zu zeigen ist Abgeschlossenheit bezüglich Addition, Multiplikation und Skalarmultiplikation mir einem Körperelement.
Die Summe zweier beschränkter Folgen ist wieder beschränkt, denn für $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B$ gilt:
Es existieren natürliche Zahlen n_1, n_2, m_1, m_2, so dass $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$n_1 > a_n,\ n_2 > b_n,\ m_1 < a_n,\ m_2 < b_n$$

Dann ist $m_1 + m_2 < (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} < n_1 + n_2$ und damit beschränkt. Das Produkt zweier beschränkter Folgen ist beschränkt, denn für $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B$ gilt:
Es existieren natürliche Zahlen n_1, n_2, m_1, m_2, so dass $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$n_1 > a_n,\ n_2 > b_n,\ m_1 < a_n,\ m_2 < b_n$$

Man wähle $k = \max\{|m_1|, |m_2|, |n_1|, |n_2|\}$ und für $k \geq 1$ ist dann $-k^2 < (a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}} < k^2$ bzw. $\left|(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}\right| < k^2$ und damit beschränkt. Für $k < 1$ ist die Beschränkung ja schon mit 1 gegeben. Für die Skalarmultiplikation mit $\lambda \in \mathbb{R}$ erhält man aus $n_1 > a_i > m_1$:

$$\lambda n_1 > \lambda a_n > \lambda m_1$$

Folglich ist $a + b, ab, \lambda a \in B$ und B eine Unteralgebra von F.
$K \subset B \subset F$ ist Teilmenge. Sei $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K$, dann existiert $\lim\limits_{n\to\infty} a = a'$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b = b'$. Mit den Rechenregeln für Grenzwerte (siehe Skript 7.9) folgt sofort

- $a + b$
  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a' + b' = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n$
- ab
  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a'b' = \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$
- λa
  $\lambda \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lambda a' = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda a_n$

Aus der Existenz der Grenzwerte für die Ausgangsfolgen ergibt sich jeweils die Existenz der Grenzwerte von $a+b, ab, \lambda a$ und damit deren Konvergenz. Es ist $a+b, ab, \lambda a \in K$ und $K \subset B$ ist Unteralgebra.
$N \subset K \subset B \subset F$ ist Teilmenge. Mit den Rechenregeln für Grenzwerte (siehe Skript 7.9) folgt

- $a+b$
  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 + 0 = 0$
- ab
  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \cdot 0 = 0$
- λa
  $\lambda \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lambda \cdot 0 = 0$

Damit ist $a+b, ab, \lambda a \in N$ und $N \subset K$ eine Unteralgebra.

e) B ist kein Ideal in F, weil z.B. für die konstante und damit beschränkte Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B$ mit $a_n := 1$ und die unbeschränkte Folge $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F \setminus B$ mit $b_n := n$, das Produkt $ab = b \in F \setminus B$ nicht beschränkt ist.

f) K ist kein Ideal in B, weil z.B. für die konvergent Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B$ mit $a_n := 1$ und die divergente Folge $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F \setminus B$ mit $b_n := (-1)^n$, das Produkt $ab = b \in B \setminus K \subset F \setminus K$ nicht konvergent ist. Damit ist K natürlich auch kein Ideal in F, denn $B \subset F$. Es müsste, wenn K Ideal in F ist, insbesondere auch das Produkt mit Elementen aus B in K liegen, wofür hiermit ein Gegenbeispiel geben ist.

g) N ist Ideal in B und damit natürlich auch in K, denn für $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B$ gilt $|a_n| < m$ mit $m \in \mathbb{N}$. Für $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in N$ gilt $|b_n| \to 0$. Das Produkt ist dann

$$|a_n b_n| \leq m\,|b_n| \to 0 \Rightarrow ab \in N$$

Analog ergibt sich $ba \in N$ und da N bereits Unteralgebra ist, erfüllt N alle Bedingungen, die an ein Ideal in B gestellt werden.
Jedoch ist N kein Ideal in F, weil z.B. für die Nullfolge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B$ mit $a_n := n^{-1}$ und die unbeschränkte Folge $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F - B$ mit $b_n = n$ das Produkt $ab = 1 \neq 0$, womit N kein Ideal in F sein kann.

Variante 1: Die lineare Abbildung aus b) lässt sich zu einem Ringhomomorphismus erweitern. Daraus folgt dann, dass N Ideal in K ist, da N Kern des Ringhomomorphismus ist.

IV Variationen, Verallgemeinerungen, Abschwächungen

Eine Abschwächung der Aufgabenbedingungen stellt zum Beispiel die Beschränkung von Algebren auf Vektorräume dar. Ideale bilden einen wichtigen Bestandteil der Algebra. Mögliche Fragestellungen sind

- Was ist das maximale Ideal in F, B, etc. ?

- Was sind die Primideale in F, B, etc. ?
- Existiert ein Ideal I, so dass $F(X)/I$ ein Körper ist?

Hier wurde die algebraische Struktur von F, B, etc. für Folgen betrachtet. Welche Strukturen lassen sich anderen Mengen in der Analysis zuordnen? Einige Denkanstöße dazu

- Welche Struktur besitzen F, B, etc. als Funktionen, also F Raum aller Funktionen über $\mathbb{R}$, B der beschränkten Funktionen, etc.? Sind dies Körper, Ringe, Algebren, Vektorräume, Gruppen, Monoide?
- Welche Struktur besitzt die Menge der stetigen Funktion über $\mathbb{R}$?
- Welche Struktur besitzt die Menge der differenzierbaren Funktion über $\mathbb{R}$?
- Welche Struktur besitzt die Menge der Polynome, Potenzreihen und Laurentreihen über $\mathbb{R}$?
- Welche Struktur besitzt die Menge der Riemann-integrierbaren/Lebesgue-integrierbaren Funktion über $\mathbb{R}$?
- Ändern sich die Strukturen, wenn man einen anderen Körper betrachte, also z.B $\mathbb{C}$, oder wenn man die Mengen über $\mathbb{R}^n$ betrachtet?
- Welche Verbindungen zwischen den einzelnen Strukturen ist erkennbar und welche Eigenschaften und Sätze lassen sich daraus ableiten?

V Nutzen & Anwendungen

Die Aufgabe vertieft das Verständnis der algebraischen Strukturen in der Analysis. Es wird möglich Eigenschaften von einer Menge auf eine Teilmenge zu übertragen, zum Beispiel durch Homomorphismen oder durch Isomorphismen.

Pascal Reisert, Yilin Xu, 17. März 2007