Musterlösung zu Blatt 4, Aufgabe 4

I Aufgabenstellung

a) Auf dem Körper $\mathbb{R}((X))$ der formalen Laurentreihen führen wir die Menge $P \subset \mathbb{R}((X))$ folgendermaßen ein: Ein Element

$$f(x) = \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k X^k \text{ mit } a_{n_0} \neq 0$$

gehört per Definition genau dann zu P, wenn $a_{n_0} > 0$. Weiterhin sei die Relation $<$ auf $\mathbb{R}((X)) \times \mathbb{R}((X))$ durch $f < g$ genau dann wenn $g - f \in P$ definiert. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}((X))$ mit dieser Relation ein angeordneter Körper ist.
b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}((X))$ bezüglich dieser Anordnung nicht archimedisch angeordnet ist.

II Beweisidee

„Worum geht's?“: Im ersten Aufgabenteil soll gezeigt werden, dass $\mathbb{R}((X))$ mit der genannten Relation angeordnet ist. Ein Körper ist angeordnet, wenn $\forall a, b, c \in K$ gilt (siehe Skript 5.1)

O.1 $a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c$

O.2 Entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$

O.3 $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

O.4 $a < b$ und $0 < c \Rightarrow ac < bc$

In Teil b) ist zu zeigen, dass der Körper $\mathbb{R}((X))$ nicht archimedisch ist. Ein angeordneter Körper heißt archimedisch angeordnet (siehe Skript 5.8), wenn für jedes $x \in K$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $x < n \cdot 1$, bzw. wenn $\mathbb{N}_K$ nicht nach oben beschränkt ist.

„Wie mach' ich das?“: Man sollte sich zunächst verdeutlichen, für welche Elemente aus $\mathbb{R}((X))$ die Relation $<$ gilt. Daraus kann man dann schließen, was notwendig ist, um zu zeigen, dass $\mathbb{R}((X))$ angeordnet ist. Man kann im Folgenden die Menge P genauer betrachten und gewisse Eigenschaften bestimmen, aus denen folgt, dass der Körper angeordnet ist. Schließlich kann man anhand von O.1 − O.4 nachprüfen, ob die Eigenschaften hinreichend sind. Bei b) reicht es ein Gegenbeispiel zu finden. Dazu kann man die natürlichen Zahlen als Teilmenge von $\mathbb{R}((X))$ betrachten.

III Lösung

a) Zunächst sollen einige Eigenschaften der Teilmenge P gezeigt werden:

(a) $0 \notin P$ ist offensichtlich, da $a_{n_0} = 0$ nicht der Definition von P entspricht

(b) Für $\mathbb{R}((X)) \setminus \{0\}$ ist entweder f oder $-f$ in P. Denn mit $f \in P$ ist $a_{n_0} > 0$, aber $-a_{n_0} < 0 \Rightarrow -f \notin P$ und umgekehrt.

(c) P ist bezüglich Addition und Multiplikation abgeschlossen.

Um die letzte Eigenschaft zu zeigen betrachte man drei Laurentreihen $f, g, h \in P$ mit

$$f(x) = \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k X^k \text{ mit } a_{n_0} \neq 0$$
$$g(x) = \sum_{k=m_0}^{\infty} b_k X^k \text{ mit } b_{m_0} \neq 0$$
$$h(x) = \sum_{k=l_0}^{\infty} h_k X^k \text{ mit } h_{l_0} \neq 0$$

Für denn Fall, dass $m_0 = n_0$ ist dann $b_{m_0} + a_{n_0} > 0$, da $b_{m_0} > 0$ und $a_{n_0} > 0$ und $b_{m_0}, a_{n_0} \in \mathbb{R}$, also im vollständig angeordneten Körper der reellen Zahlen $\Rightarrow f + g \in P$. Außerdem ist mit der Defintion der Multiplikation von Laurentreihen (siehe Blatt 3, Aufgabe 4)

$$fg = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}} = \left(\sum_{\substack{i,j\in\mathbb{Z} \\ i+j=k}} a_i b_j \right)_{k\in\mathbb{Z}}$$

das Folgeglied mit dem kleinsten Index $c_{m_0+n_0} = b_{m_0} a_{n_0} > 0$, da $b_{m_0} > 0$ und $a_{n_0} > 0$ und $b_{m_0}, a_{n_0} \in \mathbb{R} \Rightarrow fg \in P$.
Für den Fall , dass $m_0 > n_0$ ist dann $b_{m_0} > 0$ das Folgenglied mit dem niedriegsten Index und somit ist $f + g \in P$.
Für fg ergibt sich wiederrum $c_{m_0+n_0} = b_{m_0} a_{n_0} > 0$ als kleinstes Folgenglied und analog zu oben $fg \in P$.

Wir haben also gezeigt, dass P abgeschlossen ist.

Das reicht um zu zeigen, dass $\mathbb{R}((X))$ mit der obigen Relation angeordnet ist, denn O.1−O.4 folgen sofort mit $l_0 \geq m_0 \geq n_0$ zu

O.1 $f < g$ und $g < h \Rightarrow g - f \in P$ und $h - g \in P$ und mit der Abgeschlossenheit der Addition auch $h - g + g - f = h - f \in P \Rightarrow f < h$
O.2 Entweder $f < g$ oder $f = g$ oder $f < g$ ist äquivalent zu $a_{m_0} < b_{m_0}$ oder $a_{m_0} = b_{m_0}$ oder $a_{n_0} > b_{n_0}$
O.3 $f < g \Rightarrow f + h < g + h$, weil sich $f + h < g + h$ äquivalent zu $(g + h) - (f + h) \in P$ verhält und somit $g - f \in P$, was wir vorausgesetzt haben.
O.4 $f < g$ und $0 < h \Rightarrow fh < gh$ kann umgeschrieben werden zu $gh - fh \in P$, also $(g - f)h \in P$, was aus der Abgeschlossenheit folgt.

b) Gesucht ist also eine Laurentreihe $f \in P$, sodass $n \cdot e = n \cdot 1 < f$. Da jede natürliche Zahl n eine konstante Funktion, also eine Laurentreihe mit $a_{n_0} = a_1 = n$, wähle man einfach ein f mit $a_{n_0} = -1$, z.B. sei f definiert durch $a_{-1} = 1$ und $a_k = 0$ für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$. Dann ist $f - n \cdot e \in P$, da $a_{-1} = 1 > 0$ das kleinste Folgeglied ist. Damit ist die Bedingung, dass zu jedem Körperelement x ein natürliche Zahl n existiert mit $x < n \cdot 1$ nicht erfüllt und $\mathbb{R}((X))$ ist nicht archimedisch angeordnet.
(Die Nullfolge für $n = 0$ kann nicht in Relation gesetzt werden, da sie nicht in P liegt.)

IV Variationen, Verallgemeinerungen, Abschwächungen

Möchte man die Aufgabenstellung auf Teilmengen der Laurentreihen einschränken, so kann man z.B. die folgenden Fragestellungen betrachten:

- Zwei Unterringe der formalen Laurentreihen sind der Ring der formalen Potenzreihen und der Polynomring. Lassen sich auch Ringe anordnen, und wenn ja, mit welchen Ordnungsrelationen?
- Ist die Gradfunktion dafür geeignet?
- Lassen sich die multiplikativen Gruppen der beiden Ringe anordnen/archimedisch anordnen/total anordnen?

Etwas allgemeiner kann man jeden beliebigen Körper betrachten oder noch allgemeiner:

- Lässt sich auf jeder Menge eine totale Ordnung definieren?

Die Antwort der letzten Frage ist eine zentrale Aussage der Mathematik, der Wohlordnungssatz:

Jede Menge lässt sich wohlordnen.

Eine Wohlordnung ist dabei eine totale Ordnung mit der Eigenschaft, dass jede Teilmenge ein kleinstes Element bzgl. der Ordnung besitzt. Tatsächlich stößt man dabei an die Grenzen der konstruktiven Mathematik, denn es kann konstruktiv keine entsprechende Ordnung auf den reellen Zahlen beschrieben werden. Der Satz gehört zu den dem Auswahlaxiom äquivalenten Aussagen. Die Aussage des Auswahlaxioms und des Wohlordnungssatzes kann auch nicht mit den Mitteln der Prädikatenlogik 1. Stufe bewiesen werden. Von Kurt Gödel wurde jedoch bewiesen, dass das Auswahlaxiom, und damit auch der Wohlordnungssatz, keinen Widerspruch zum Axiomsystem der ZF-Mengenlehre (Zermolo-Fraenkel-Mengenlehre, die auf der Prädikatenlogik 1. Stufe aufbaut) darstellt. Insbesondere sind die Sätze, die damit bewiesen werden können von Bedeutung für die Mathematik. Ein typisches Beispiel ist der Nachweis, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt, was üblicherweise mit dem Lemma von Zorn bewiesen wird (ebenfalls äquivalent zum Auswahlaxiom). Oder auch das die additiven Gruppen von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ isomorph sind (man betrachte sie zum Nachweis als $\mathbb{Q}$-Vektorraum).

V Nutzen & Anwendungen

Die Aufgabe ist ein schönes Beispiel für einen nicht total angeordneten Körper und dient der Übung im Umgang mit abstrakten Begriffen und Defintionen. Die formalen Laurentreihen sind Oberring der Potenzreihen, auf die Sie in der Algebra wieder stoßen werden. Da sie einen Körper darstellen, sind sie z.B. eine Körpererweiterung von K bzw. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, dabei ist dann X transzendentes Element der Erweiterung. Natürlich lassen sich auch die Laurentreihen erweitern.

Pascal Reisert, 13. März 2007