Musterlösung zu Blatt 2, Aufgabe 5

I Aufgabenstellung

Finden Sie drei Systeme $\mathbb{M}_i$, e_i, S_i, wobei $e_i \in \mathbb{M}_i$ und $S_i : \mathbb{M}_i \to \mathbb{M}_i$, $i = 1, 2, 3$, so dass das Peano-Axiom P.i verletzt, während P.j für $j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$ erfüllt ist, und beweisen Sie diese Eigenschaften. Versuchen Sie nach Möglichkeit, die $\mathbb{M}_i$ minimal zu wählen.

II Beweisidee

„Worum geht's?“: Hierzu seien die Peano-Axiome gleich zu Beginn noch einmal wiederholt: Ein *System* $\mathbb{M}$, e, S besteht aus einer Menge $\mathbb{M}$, einem („Anfangs-“)Element $e \in \mathbb{M}$ und einer Abbildung $S : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$. Es ist genau dann ein *System natürlicher Zahlen*, wenn es die folgenden Aussagen, die sog. Peano-Axiome erfüllt:

P.1 $S : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ ist injektiv.

P.2 e ist nicht im Bild von $\mathbb{M}$ bei S, d.h. $e \notin S(\mathbb{M})$.

P.3 Für alle Teilmengen B von $\mathbb{M}$ gilt:
Wenn $e \in B$ und $S(B) \subset B$ nachgewiesen werden können, so ist $B = \mathbb{M}$.
(Dieses Axiom entspricht dem Induktionsprinzip)

In dieser Aufgabe sollen nun drei Systeme gefunden werden, die jeweils eines der Peano-Axiome verletzen, jedoch die beiden jeweils anderen erfüllen. Dabei soll der Ausdruck *System* nicht verunsichernd wirken: Um ein System zu „kreieren“, benötigt man lediglich eine Menge $\mathbb{M}$ mit einem Element e und eine Abbildung $S : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ auf dieser Menge. So ein System muss (und soll sogar) keineswegs kompliziert gewählt werden.

„Wie mach' ich das?“: Finden wir exemplarisch ein System $\mathbb{M}_1$, e_1, S_1, das das Peano-Axiom Nr. 1 verletzt, aber den anderen beiden (P.2 und P.3) genügt. Wenn P.1 nicht erfüllt sein darf, folgt, dass $S_1 : \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_1$ nicht injektiv sein darf. Aber P.2 und P.3 müssen zutreffen. Unter diesen Prämissen sollte man nun anfangen vor allem erst einmal (bzgl. Inklusion) kleine Mengen zu betrachten (z.B. die Menge $\{e_1, *\}$ oder die Menge $\{e_1, *, \#\}$; die Bezeichnung der Elemente ist hier vollkommen beliebig; lediglich das „Anfangs-“Element e_1 muss darin enthalten sein) und nicht-injektive Abbildungen zu finden, die kein Element auf $e_1 \in \mathbb{M}_1$ abbilden. Hat man ein solches System also gefunden, ist noch das Peano-Axiom Nr. 3 zu überprüfen.
Analog führt man das für die anderen beiden geforderten Systeme durch.

„Wie komm' ich drauf?“: In dieser Aufgabe ist es sehr wichtig, zunächst nur einfache Mengen mit wenigen Elementen zu betrachten, und auf ihnen Abbildungen zu studieren, um ein „Gefühl“ für die Injektivität von S und die Peano-Axiome zu erhalten (vor allem für das P.3, welches ja auf den ersten Blick etwas ungemütlich anmutet). Hilfreich ist hierbei – wie so oft – eine kleine Skizze, auf der man Menge $\mathbb{M}$ und Abbildung $S : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ veranschaulicht.

III Lösung

P.1 Wie oben bereits angedeutet, betrachtet man kleine Mengen $\mathbb{M}_1$, zum Beispiel eine mit nur zwei Elementen: Da e_1 in $\mathbb{M}_1$ enthalten sein muss, also $\mathbb{M}_1 := \{e_1, *\}$ mit einem x-beliebig benannten zweiten Element $*$. Jetzt ist es unsere Aufgabe, eine nicht-injektive Abbildung von $\mathbb{M}_1$ nach $\mathbb{M}_1$ zu finden, in deren Bild sich nicht e_1 befindet (P.2 muss erfüllt sein!). Da gibt es nur eine einzige mögliche Abbildung $S_1 : \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_1$:

$$\begin{aligned} S_1(e_1) &:= * \\ S_1(*) &:= * \end{aligned}$$

Denn wäre das Bild von einem der beiden Elemente anders, d.h. e_1, so wäre $e_1 \in S_1(\mathbb{M}_1)$, also P.2 verletzt. Aus dieser Definition geht aber klar hervor, dass $e_1 \notin S_1(\mathbb{M}_1)$, also P.2 erfüllt, aber trotzdem P.1 verletzt ist, da $S_1(e_1) = S_1(*)$ mit $e_1 \neq *$.
Jetzt muss noch P.3 überprüft werden: Man betrachte also eine Teilmenge $B \subset \mathbb{M}_1$ mit $e_1 \in B$. Von dieser Art existieren genau 2 verschiedene Mengen: $B = \{e_1\}$ und $B' = \{e_1, *\}$. Offensichtlich ist: $S_1(B) = \{*\} \not\subset B$ und $S_1(B') = \{*\} \subset B'$. Nach P.3 muss also B' genau gleich $\mathbb{M}_1$ sein. Das ist aber gerade erfüllt.
Also ist das genannte System das gesuchte System $\mathbb{M}_1, e_1, S_1$.

P.2 Wir wählen wieder eine zwei-elementige Menge $\mathbb{M}_2 = \{e_2, *\}$. Nun soll die Abbildung S_2 injektiv gewählt werden (P.1), aber mit $e_2 \in S_2(\mathbb{M}_2)$ (damit P.2 verletzt ist). Es gibt unter diesen Prämissen prinzipiell zwei Möglichkeiten für S_2:

$$S_2(e_2) := * \qquad \& \qquad S_2(*) := e_2$$
$$\text{oder :}$$
$$S_2(e_2) := e_2 \qquad \& \qquad S_2(*) := *$$

Die zweite Methode kollidiert offensichtlich mit P.3, da hier für eine Teilmenge $A := \{e_2\} \subset \mathbb{M}_2$ gilt: $S_2(A) = \{e_2\} \subset A$ und $e_2 \in A$, obwohl $A \neq \mathbb{M}_2$.
Also entscheiden wir uns für die erstgenannte Defintion von S_2. Zur Überprüfung von P.3 wählen wir wieder Teilmengen mit Element e_2: $B = \{e_2\}$ und $B' = \{e_2, *\}$. Klar ist: $S(B) = \{*\} \not\subset B$ und $S(B') = \{e_2, *\} \subset B'$. Also muss nach P.3 $B' = \mathbb{M}_2$ sein. Das ist korrekt, also ist auch P.3 erfüllt.

P.3 Nach ein wenig Überlegung ist es verständlich, dass man hier leider nicht mit einer endlichen Menge $\mathbb{M}_3$ arbeiten kann (Ausprobieren hilft, zu dieser Erkenntnis zu gelangen). Deshalb wählen wir eine unendliche Menge: $\mathbb{M}_3 = \mathbb{N} \cup \{*\}$ mit dem (von den natürlichen Zahlen gewohnten) „Anfangs-"Element $e_3 := 0$ und der gewohnten „Nachfolge-"Funktion $S_3(n) := n + 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$ und $S_3(*) := *$.
Das Besondere dieses Systems ist, dass man die profanen natürlichen Zahlen samt Nachfolgefunktion und Anfangselement, die für sich alle Peano-Axiome erfüllen, um ein Element $*$ erweitert, das auf sich selbst abgebildet wird, also in sich „geschlossen" und nicht in die „Kette" der natürlichen Zahlen eingebunden ist.
Offensichtlich ist für $\mathbb{N}$ P.1 erfüllt. Da $\mathbb{M}_3$ nur um $*$ erweitert ist, und S_3 $*$ auf sich selbst abbildet, aber sonst die übliche (injektive) Nachfolgefunktion der natürlichen Zahlen ist,

ist auch $S_3 : \mathbb{M}_3 \to \mathbb{M}_3$ eine injektive Funktion. Also ist P.1 erfüllt.
P.2 ist auch erfüllt, da es kein Element $n \in \mathbb{N}$ gibt, dessen Bild bei S_3 0 ergibt und $S_3(*) = * \neq 0$.
P.3 ist verletzt, da $\mathbb{N} \subset \mathbb{M}_3$ und $e_3 = 0 \in \mathbb{N}$ und $S_3(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$, aber: $\mathbb{N} \neq \mathbb{M}_3$. Also ist dieses System das gesuchte System, das P.1, P.2 nicht jedoch P.3 erfüllt.

Varianten: Selbstverständlich gibt es sehr viele verschiedene Mengen, auf welchen man die gesuchten Systeme aufbauen kann. Es ließen sich auch drei-elementige Mengen als Basis bei den ersten beiden gesuchten System hernehmen. Nach der in der Aufgabe genannten Minimalitätseigenschaft des Systems geurteilt, sollte aber jeweils das kleinere (bzgl. Inklusion) System bevorzugt werden.
Für „P.2“ gibt es sogar ein noch kleineres System mit $\mathbb{M}_2 = \{e_2\}$, das den Anforderungen entspricht:

- Das System erfüllt offenbar P.1, weil $S_2 : \mathbb{M}_2 \to \mathbb{M}_2$, $e_2 \mapsto e_2$ trivialerweise injektiv ist.
- Das System verletzt P.2, denn $S_2(\mathbb{M}_2) = \{e_2\}$, also: $e_2 \in S_2(\mathbb{M}_2)$.
- Das System erfüllt P.3, da jede Teilmenge $B \subset \mathbb{M}_2$ mit $e_2 \in B$ automatisch schon gleich $\mathbb{M}_2$ ist.

IV Variationen, Verallgemeinerungen, Abschwächungen

Weitergehend könnte man sich damit beschäftigen, wie solche Systeme, die jeweils eines der Peano-Axiome nicht erfüllen, beschaffen sind. Bisher sind ja nur einzelne Repräsentanten genannt worden (wie in der Lösung).

V Nutzen & Anwendungen

Diese Aufgabe ist eine Übung im Umgang mit den Peano-Axiomen. Sie zeigt, dass keines der Peano-Axiome überflüssig ist:
Wäre nämlich ein Axiom redundant, so müsste ein System natürlicher Zahlen allein durch die beiden anderen Peano-Axiome eindeutig definiert werden können. Dass das nicht der Fall ist, kann jetzt leicht nachvollzogen werden: Alle drei Systeme der obigen Lösung waren keine Systeme natürlicher Zahlen, trotzdem haben sie alle genau zwei der Peano-Axiome erfüllt.

Ludwig Straub, 13. März 2007