Musterlösung zu Blatt 12, Aufgabe 7

I Aufgabe

Seien $\cosh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (Cosinus hyperbolicus) und $\sinh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (Sinus hyperbolicus) definiert durch

$$\cosh(x):=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh(x):=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

a) Zeigen Sie, dass das System

$$\begin{cases} f'=g \\ g'=f \end{cases}$$

mit den Randbedingungen f(0) = 0, g(0) = 1 genau eine Lösung hat, und zwar f(x) = sinh(x), g(x) = cosh(x).

b) Zeigen Sie für alle $x\in\mathbb{R}$

$$\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1.$$

c) Zeigen Sie, dass $\sinh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bijektiv ist, und dass für die Ableitung der Umkehrfunktion $\operatorname{Ar}\sinh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (Areasinus hyperbolicus) gilt

$$\operatorname{Ar}\sinh'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

d) Zeigen Sie, dass $\cosh:[0,\infty[\to[1,\infty[$ bijektiv ist, und dass für die Ableitung der Umkehrfunktion $\operatorname{Ar}\cosh:[1,\infty[\to[0,\infty[$ (Areacosinus hyperbolicus) gilt

$$\operatorname{Ar}\cos'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

II Beweisidee

„Worum geht's?“: In der Aufgabe tauchen die bis dato unbekannten Begriffe „Cosinus hyperbolicus“ und „Sinus hyperbolicus“ auf. Es wird eine Definition angegeben und die wesentliche Aufgabe besteht nun darin, angegebene Formeln formal zu beweisen.

„Wie mach' ich das?“: In Teilaufgabe a) wird zunächst ein System angegeben, das besagt, dass die Ableitung der Funktion f die Funktion g ist, und dessen Ableitung sei wiederum die Funktion f. Man kann sich vorstellen, dass diese Eigenschaft sicherlich auf eine Reihe von Funktionen zutrifft, auch wenn einem spontan keine einfällt. Unter den Bedingungen f(0) = 0 und g(0) = 1 soll gelten, dass f und g eindeutig bestimmt sind als f(x) = sinh(x) und g(x) = cosh(x). Es schaut also so aus, als müsste hier ein Eindeutigkeitsbeweis geführt werden. Man merkt schnell, dass das klassische Prinzip des Widerspruchsbeweises in der Form: „Sei h eine weitere Funktion ... , dies führt zu einem Widerspruch, also sind f(x) = sinh(x) und g(x) = cosh(x) eindeutige Lösungen des Systems“ in diesem Fall schwer fallen dürfte, weil nicht vorgegeben ist, von welcher Art eine andere Funktion sein könnte. Die Lösung der Aufgabe muss sich folglich sehr eng an die Vorgaben halten und es muss genügen aus den wenigen vorgegebenen Bedingungen die Eindeutigkeit herzuleiten.

Weniger komplex scheint Teilaufgabe b). Hier geht es lediglich darum eine Formel zu beweisen, die sehr stark an $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$ erinnert. Eine kleine Hürde könnte die Anwendung der binomischen Formel auf die e-Funktion sein.

In c) und d) lautet das Stichwort „Umkehrfunktion“. Hier ist es sehr von Vorteil sich an den Umkehrsatz (18.1) zu erinnern, welcher lautet $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$. Da die Funktionen f und g in dieser Aufgabe bereits belegt sind, sei in diesem Fall der Umkehrsatz $t'(y) = \frac{1}{s'(t(y))}$.

Zu unserer großen Freude stellen wir fest, dass die angegebene Formel von ähnlicher Art ist. Jetzt kommt es darauf an, herauszufinden, inwiefern sich die Gleichung mit Hilfe des Umkehrsatzes beweisen lässt. Voraussetzung für die Existenz einer Umkehrfunktion ist die Bijektivität der Funktion. Zur Erinnerung: injektiv heißt $:\Leftrightarrow \forall x, x' \in X : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ und surjektiv heißt $:\Leftrightarrow \forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$. Es bietet sich an, mit dem Satz von Blatt 11, Aufgabe 1a) zu arbeiten. Dieser besagt, dass eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit I = [a,b] (kompaktes Intervall) genau dann injektiv ist, wenn sie strikt monoton ist.

„Wie komm’ ich drauf?“: Zugegeben, die Begriffe Cosinus hyperbolicus und Sinus hyperbolicus scheinen auf den ersten Blick seltsam gewählt, da in der Definition etwas von einer Addition bzw. Subtraktion von e-Funktionen steht. Doch Teilaufgabe b) verrät, dass die Bezeichnung dieser Funktionen eventuell gar nicht so weit hergegriffen ist. Sollte es der Fall sein, dass die Funktionen einem vollkommen nichtssagend erscheinen, ist es von großer Hilfe, deren Graphen in ein Koordinatensystem zu zeichnen. Beide Funktionen haben keine Ähnlichkeit zur Cosinus- bzw. Sinusfunktion. Die Cosinus hyperbolicus-Funktion ist nämlich eine nach oben geöffnete Parabel mit Minimum im Punkt (0/1). Da man den Graph mit dem Verlauf eines an zwei Punkten aufgehängten Seils vergleichen kann, wird er auch als Katenoide (Kettenlinie) bezeichnet. Die Sinus hyperbolicus-Funktion ähnelt hingegen der Funktion $h(x) = x^3$ und ist streng monoton steigend.

III Lösungen

a) Die Eigenschaften (und Bedingungen), die das System hat, sind: $f' = g, g' = f, f(0) = 0, g(0) = 1$.

Daraus kann man folgern: $f'(0) = g(0) = 1$, $g'(0) = f(0) = 0$ und $g''(0) = f'(0) = g(0) = 1$. Man sieht, dass die Randbedingung $f(0) = 0$ notwendig ist, denn: $g'(0) = [1]' = 0 = f(0)$. Andersherum folgt aus $f'(0) = [0]' = g(0) = 1$. Man sieht, dass der Funktionswert von g(0) nicht unbedingt 1 sein müsste, sondern jede beliebige reelle Zahl r annehmen könnte. Dann würde nämlich immer noch gelten $g'(0) = [r]' = 0 = f(0)$ mit $r \in \mathbb{R}$. Die Randbedingung, die die Funktionen eindeutig bestimmt, ist also $g(0) = 1$.

Nun bleibt noch zu überprüfen, ob f(x) und g(x) wirklich gleich sinh(x) bzw. cosh(x) sind. Dies ist nicht sehr schwer zu überprüfen.

Wir erhalten $g(0) = \cosh(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$ und $f(0) = \sinh(0) = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$.

Außerdem gilt: $f'(x) = [\sinh(x)]' = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \cosh(x) = g(x)$ und auch

$g'(x) = [\cosh(x)]' = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} = \sinh(x) = f(x)$.

Damit sind alle Bedingungen erfüllt.

b) Man setzt die Definitionen in die Gleichung ein:

$$\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=1$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(e^x+e^{-x}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(e^x-e^{-x}\right)^2=1$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^2\left[\left(e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}\right)-\left(e^{2x}-2e^xe^{-x}+e^{-2x}\right)\right]=1$$
$$\Leftrightarrow e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}-e^{2x}+2e^xe^{-x}-e^{-2x}=4$$
$$\Leftrightarrow e^{x-x}=1$$
$$\Leftrightarrow e^0=1$$

c) Zunächst wird die Bijektivität gezeigt. Es ist bekannt, dass e^x und e^{-x} injektiv sind. Bei der Addition dieser Funktionen gäbe es ein Problem, weil eine achsensymmetrische Funktion entstehen würde (siehe d)). Die Subtraktion ergibt jedoch eine um den Ursprung punktsymmetrische Funktion.

In der ersten Aufgabe des elften Blattes (siehe auch Musterlösungen) ist u.a. zu beweisen, dass eine stetige Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ genau dann injektiv ist, wenn sie strikt monoton ist. Die Äquivalenz bezieht sich allerdings auf ein kompaktes Intervall. Man kann diese Einschränkung jedoch aufheben, indem man den Zahlenraum $\mathbb{R}$ als eine Vereinigung unendlich vieler kompakter Intervalle betrachtet. Damit bliebe zu beweisen, dass f(x) streng monoton ist. Rein intuitiv ist klar, dass dann die Steigung der Funktion, die durch die Ableitung angegeben wird, entweder immer kleiner/gleich 0 bei monoton fallenden oder größer/gleich 0 bei monoton wachsenden Funktionen sein muss (siehe auch Satz 17.4.1). Greift man auf einige Aussagen aus a) zurück, so kann man erkennen, dass $f'(x)\geq 1$, denn durch $g'(0)=f(0)=0$ und $g''(0)=f'(0)=g(0)=1$ ist klar, dass im Punkt 0 die Funktion $g(x)=f'(x)$ ein lokales Minimum hat. Damit ist bewiesen, dass die Funktion f streng monoton wachsend und injektiv ist.

Die Surjektivität ergibt sich dadurch, dass $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gilt, also der Wertebereich (das Bild der Abbildung) alle reellen Zahlen beinhaltet.

Nun bleibt noch die angegebene Gleichung zu beweisen. Mit Hilfe des Umkehrsatzes ($t'(y)=\frac{1}{s'(t(y))}$) und den Gleichungen aus a) $f'(x)=g(x)$ und b) $\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$ und dem Wissen, dass $\sinh(\operatorname{ar}\sinh(x)) = x$ gilt, kommt man recht schnell auf die Lösung.

$$\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1\Leftrightarrow[f'(x)]^2-[f(x)]^2=1\Leftrightarrow f'(x)=\sqrt{1+[f(x)]^2}$$

$f'(x)=\sinh' x$ setzt man jetzt für $s'(x)$ in den Umkehrsatz ein und die gesuchte Umkehrfunktion t(y) ist $\operatorname{ar}\sinh(x)$.

$$\operatorname{ar}\sinh'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+[s(t(y))]^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+[\sinh(\operatorname{ar}\sinh(x))]^2}}=\frac{1}{\sqrt{x+1^2}}$$

d) Analog zu c) lässt sich d) lösen. Es muss allerdings beachtet werden, dass cosh(x) anscheinend nicht auf allen reellen Zahlen injektiv und surjektiv ist, sonst gäbe es die angegebene Einschränkung nicht. Die Beweismethode der Injektivität verläuft wie in c), d.h. es bleibt zu zeigen, dass g auf dem Intervall $[0,\infty[$ streng monoton wachsend oder fallend ist. Wiederum ist der Zusammenhang $g'(x)=f(x)$ von Nutzen. Zu zeigen ist, dass der Wertebereich von f auf dem Intervall $[0,\infty[$ immer größer oder immer kleiner 0 ist. Da bereits

festgestellt wurde, dass f monoton wachsend ist, genügt es zu zeigen, dass $f(0) \geq 0$. Und dies nach einem Blick auf Teilaufgabe a) oder durch schnelles Nachrechnen sofort bestätigt.
Auch die Surjektivität ist leicht zu beweisen. Es braucht lediglich gezeigt werden, dass $[1,\infty[$ in dem Wertebereich von g liegt. Da g ab dem x-Wert 0 streng monoton steigend ist, genügt es zu zeigen, dass $g(0) \geq 1$ und dies ist durch Nachrechnen oder die Angabe in a) offensichtlich.
Der Beweis der angegebenen Formel erfolgt wie in c).

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \Leftrightarrow [g(x)]^2 - [g'(x)]^2 = 1 \Leftrightarrow g'(x) = \sqrt{[g(x)]^2 - 1}$$

Hier ist $t(y) = \operatorname{ar}\cosh(x)$ und $s(x) = f(x)$ bzw. $s'(x) = f'(x) = g(x)$. Nach Einsetzen in den Umkehrsatz folgt:

$$\operatorname{ar}\cosh'(x) = \frac{1}{\sqrt{[g(\operatorname{ar}\cosh(x))]^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{[\cosh(\operatorname{ar}\cosh(x))]^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

IV Variationen der Aufgabe

Bei der Existenz des Cosinus und Sinus hyperbolicus liegt der Gedanke nicht fern, dass es auch einen Tangens hyperbolicus und Cotangens hyperbolicus gibt. Dies ist in der Tat so, man definiert

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad \text{und} \quad \coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

Auch existieren Additionstheoreme und Potenzreihendarstellungen des hyperbolischen Cosinus und Sinus:

$$\cosh(z+w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \cosh w$$
$$\sinh(z+w) = \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w$$

$$\cosh = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \qquad \sinh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Der Definitionsraum des hyperbolischen Cosinus sowie des hyperbolischen Sinus kann natürlich auf den Körper der komplexen Zahlen erweitert werden. Dann gelten die Beziehungen:

$$\cosh z = \cos iz, \qquad \sinh z = -i \sin iz$$

Eine diffizilere Variation der Aufgabe c) und d) könnte lauten, nicht

$\operatorname{ar}\sinh' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ bzw. $\operatorname{ar}\cosh' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ zu zeigen, sondern

$\operatorname{ar}\sinh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ bzw. $\operatorname{ar}\cos x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

und für die Areafunktion des Tangens (areatangens hyperbolicus) $\operatorname{ar}\tanh : (-1;1) \to \mathbb{R}$:

$$\operatorname{ar}\tanh = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (|x| < 1).$$

Weitere interessante Zusammenhänge und Informationen gibt es en masse in der Fachliteratur und im Internet.

Johannes Müller