Musterlösung zu Blatt 11, Aufgabe 3

I Aufgabenstellung

Wir nennen eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, wenn der Grenzwert einer konvergenten Folge in A stets wieder in A liegt. Beweisen Sie:
a) Für eine beliebige Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ ist $\overline{D}$ (die Menge der Berührpunkte von D) abgeschlossen.
b) $\overline{D}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die D enthält.
c) Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen, wenn $A = \overline{D}$ für eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ gilt.
d) Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn es zu jedem $b \in \mathbb{R} \setminus A$ stets eine reelle Zahl $r > 0$ mit $U_r(b) \cap A = \emptyset$ gibt.
e) Sei $H(D)$ die Menge aller Häufungspunkte einer Menge $D \subset \mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie: $H(D)$ ist abgeschlossen.

II Beweisidee

„Worum geht's?“: Die Formulierung der Aufgabe arbeitet mit insgesamt drei wichtigen Begriffen: „Grenzwert einer konvergenten Folge“, „Berührpunkt“ und „Häufungspunkt“, jeweils bezogen auf eine bestimmte zugrunde liegende Menge - und damit wird es vorrangige Aufgabe des Beweisenden, diese Begriffe zu untersuchen und schließlich in geforderter Weise in Relation zu setzen.

„Wie mach' ich das?“: Das beginnt, wie eigentlich immer, bei den Definitionen:
1. Grenzwert a einer Folge a_n:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so dass alle Folgenglieder ab a_{n_0} zu a einen Abstand kleiner als ε haben.
2. Berührpunkt x einer Menge X:

$$\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap X \neq \emptyset$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ ist die Schnittmenge der ε-Umgebung mit der Menge X nicht leer.
3. Häufungspunkt x einer Menge X:

$$\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap (X \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ ist die Schnittmenge der ε-Umgebung mit der Menge X ohne x nicht leer.

Dabei wird der Begriff „Umgebung“ verwendet:

$$U_\varepsilon(x) :=]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\text{ bzw. } [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$$

als geschlossene oder offene Umgebung. Dementsprechend folgt:

$$y \in U_\varepsilon(x) \Leftrightarrow |x - y| = |y - x| < \varepsilon \text{ bzw. ...} \leq \varepsilon.$$

Und schließlich noch zur Klärung des Unterschieds zwischen Berühr- und Häufungspunkt: Häufungspunkte sind offensichtlich stets auch Berührpunkte, diese jedoch nicht immer Häufungspunkte. Liegen in einer Umgebung eines Punktes der zugrunde liegenden Menge keine weiteren Punkte, so ist dieser Punkt offenbar kein Häufungspunkt, ebenso zwangsläufig aber Berührpunkt; man spricht dann von isolierten Punkten.

„Wie komm' ich drauf?“: Die Aufgabenstellung hat hier den Vorteil, dass die entscheidenden Begriffe sehr leicht herauszuarbeiten sind. Zur Lösung kommt es dann darauf an, die Fragestellungen der Aufgabenteile mithilfe dieser Begriffe darzustellen und die geforderten Implikationen und Schlüsse streng über die Definitionen durchzuführen.

III Lösung

Hilfssatz: $\overline{\overline{D}} = \overline{D}$ Zunächst ist aus der Definition ersichtlich, dass stets $X \subset \overline{X}$, also hier: $\overline{D} \subset \overline{\overline{D}}$.

Sei nun d_0 ein Element aus $\overline{\overline{D}}$. Für dieses Element gilt per Definition (als Berührpunkt):

$$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 : U_{(\varepsilon:2)}(d_0) \cap \overline{D} \neq \emptyset.$$

Es muss also stets ein Element $d_1 \in U_{(\varepsilon:2)}(d_0) \cap \overline{D}$ existieren, für das dann, weil es ja in $\overline{D}$ liegt, wiederum gilt:

$$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 : U_{(\varepsilon:2)}(d_1) \cap D \neq \emptyset,$$

weshalb wiederum ein Element $d_2 \in U_{(\varepsilon:2)}(d_1) \cap\ D$ existieren muss.

Dann folgt aber (mithilfe der Dreiecksungleichung $|x+y| \leq |x| + |y|$):

$$\left.\begin{array}{l} d_1 \in U_{(\varepsilon:2)}(d_0) \Leftrightarrow |d_0 - d_1| < \frac{\varepsilon}{2} \\ d_2 \in U_{(\varepsilon:2)}(d_1) \Leftrightarrow |d_1 - d_2| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}\right\} |d_0 - d_2| = |(d_0 - d_1) + (d_1 - d_2)| \leq |d_0 - d_1| + |d_1 - d_2| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Zusammengefasst wurde damit aber gezeigt, dass:

$$\forall \varepsilon : |d_0 - d_2| < \varepsilon \Leftrightarrow U_\varepsilon(d_0) \cap D = \{d_2, ...\} \neq \emptyset,$$

weshalb also d_0 nicht nur, wie angenommen, in $\overline{\overline{D}}$, sondern auch in $\overline{D}$ liegen muss, und zwar für jedes $d_0 \in \overline{\overline{D}}$. Es folgt damit: $\overline{\overline{D}} \subset \overline{D}, \overline{D} \subset \overline{\overline{D}} \Rightarrow \overline{\overline{D}} = \overline{D}$.

a) Sei a der Grenzwert einer konvergenten Folge (a_n) in D. Dann gilt nach Definition:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - a| \leq \varepsilon.$$

Die letzte Aussage lässt sich nun umformen: Weil a_0 (ebenso alle weiteren Folgenglieder) zu a_n einen Abstand kleiner als ε, muss es in dessen ε-Umgebung $U_\varepsilon(a)$ liegen (1), weil es zudem in D liegt, muss es auch im Schnitt der beiden Mengen $U_\varepsilon(a) \cap D$ liegen (2):

$$|a_n - a_0| \leq \varepsilon \Leftrightarrow^{(1)} a_0 \in U_\varepsilon(a) \Leftrightarrow^{(2)} U_\varepsilon(a) \cap D = \{a_0, ...\} \neq \emptyset$$

Das selbe lässt sich wie angedeutet auch für alle nachfolgenden Glieder sagen, weshalb im Schnitt außer a_0 mit Sicherheit noch weitere Elemente zu finden sind. Wichtig hier ist aber lediglich, dass die Menge nie leer ist. Es zeigt sich jetzt nämlich, dass jeder Grenzwert einer in D konvergenten Folge die Definition eines Berührpunkts von D erfüllt, also in $\overline{D}$ liegen muss. Zugleich ist damit auch bekannt, dass der Grenzwert jeder in $\overline{D}$ konvergenten Folge in $\overline{\overline{D}}$ liegen muss, indem der soeben gewonnene Satz auf $\overline{D}$ angewendet wird. Es ist jedoch gerade $\overline{D} = \overline{\overline{D}}$, wie im Hilfssatz gezeigt wurde. Und damit ist $\overline{D}$ abgeschlossen.

Variante: Mit einem Widerspruchsbeweis lässt sich zeigen, dass die Annahme, der Grenzwert einer konvergenten Folge in $\overline{D}$ läge außerhalb von $\overline{D}$ zu einem Widerspruch führt, weil er auf jeden Fall, wie gezeigt, in $\overline{\overline{D}}$ liegen muss. Logisch der gleiche Beweisgang: Es wird ebenfalls $\overline{\overline{D}} = \overline{D}$ vorausgesetzt.

b) In a) wurde schon bewiesen, dass $\overline{D}$ eine abgeschlossene Menge ist, zudem ist bekannt, dass D darin enthalten ist. Zu zeigen bleibt also, dass es die minimale Menge dieser Eigenschaft ist. Es soll im Folgenden der Beweis erbracht werden, dass $\overline{D}$ in jeder beliebigen abgeschlossenen Menge, die D enthält, enthalten sein muss.
Sei E eine beliebige abgeschlossene Menge, die D enthält. Jede in D konvergente Folge konvergiert dann genauso in E. Soll E abgeschlossen sein, so muss auch jeder Grenzwert einer solchen Folge in E enthalten sein.
Nun wurde in a) gezeigt, dass jeder Grenzwert einer konvergenten Folge Berührpunkt ist. Es kann aber genauso gezeigt werden, dass jeder Berührpunkt von D auch Grenzwert einer konvergenten Folge in D ist: als Berührpunkt muss nämlich in jeder ε-Umgebung um diesen Punkt noch mindestens ein Punkt der Menge enthalten sein (auch wenn es nur der Punkt selbst wäre; im Unterschied zu Häufungspunkten), weshalb sich eine Folge konstruieren lassen muss, die in jeder (beliebig kleinen) ε-Umgebung unendlich viele Folgenglieder hat, oder anders ausgedrückt: gegen diesen Berührpunkt konvergiert.
Wenn aber jeder Berührpunkt von D zugleich Grenzwert einer in D konvergenten Folge ist, so müssen in E auch alle Berührpunkte von D, also die Menge $\overline{D}$, enthalten sein - was zu zeigen war.

c) Auch wenn das nicht eindeutig gefordert wird, lassen sich hier beide Richtungen (also ein „genau dann, wenn“) zeigen. Dass jede Menge von Berührpunkten $A = \overline{D}$ abgeschlossen ist, war Aufgabenteil b). Dass schließlich auch jede abgeschlossene Menge eine Menge von Berührpunkten ist, kann aus Aufgabenteil b) gefolgert werden. Ist nämlich die Menge A abgeschlossen, so enthält sie alle Grenzwerte der in A konvergenten Folgen, und somit zugleich (das war die Aussage in b)) all ihre Berührpunkte. Es ist für eine abgeschlossene Menge A also $A = \overline{A}$.

d) Hier wird das „genau dann, wenn“ nun ausdrücklich gefordert, es gilt also zwei Implikationen („Richtungen“) zu beweisen.
$\Rightarrow$ Angenommen A wäre abgeschlossen, es gäbe aber zu einem $b \in \mathbb{R} \setminus A$ kein $r > 0$, so dass

der Schnitt der r-Umgebung von b mit der Menge A leer wäre. Dann gilt:

$$\forall r > 0 : U_r(b) \cap A \neq \emptyset,$$

b wäre also Berührpunkt von A, zugleich, nach b), Grenzwert einer in A konvergenten Folge, aber nicht in A. A könnte dann keineswegs abgeschlossen sein, was ein Widerspruch ist.

$\Leftarrow$ Umgekehrt: angenommen, A wäre nicht abgeschlossen, auch wenn für alle $b \in \mathbb{R} \setminus A$ ein $r > 0$ existiert, so dass der Schnitt der r-Umgebung von b mit der Menge A leer ist. Dann kann b nie Berührpunkt sein, ebensowenig Grenzwert einer in A konvergenten Folge, da aus Aufgabenteil a) ja resultieren würde, dass jeder Grenzwert einer konvergenten Folge stets Berührpunkt ist. Es sind also alle Grenzwerte von in A konvergenten Folgen auch in A enthalten (keiner ist außerhalb), somit ist A abgeschlossen - Widerspruch.

e) Zuletzt soll wie in a) die Abgeschlossenheit einer Menge nachgewiesen werden, diesmal handelt es sich jedoch nicht um die Menge der Berühr- sondern der Häufungspunkte.
Der Unterschied gemäß den Betrachtungen aus II. ist minimal aber entscheidend: sollen bei Berührpunkten in jeder (beliebig kleinen) ε-Umgebung Punkte der zugrunde liegenden Menge gefunden werden, auch wenn es nur der Berührpunkt selbst ist, so ist diese Option bei Häufungspunkten ausgeschlossen, es müssen also in jeder Umgebung vom Häufungspunkt verschiedene Elemente der Menge liegen. Macht das nun im vorliegenden Fall einen entscheidenden Unterschied für den Beweis, wie er in a) vorgetragen wird? Nein!
So folgt aus a), dass jeder Grenzwert einer in $H(D)$ konvergenten Folge Berührpunkt von $H(D)$ sein muss. Eine (und nach b) die minimale) abgeschlossene Menge, die $H(D)$ enthält, ist also $\overline{H(D)}$.

Nur ist wieder $H(D) = \overline{H(D)}$: Die Menge der Häufungspunkte $H(D)$ ist ja genau die Menge der Berührpunkte $\overline{D}$ ohne die Menge der isolierten Punkte (sie sei D_i). Die Menge der Berührpunkte von $H(D)$ ist dann aber nichts anderes als die Menge der Berührpunkte von $\overline{D}$ $(=\overline{\overline{D}})$ ohne die Menge der Berührpunkte von D_i, $\overline{D_i}$. Jetzt ist $\overline{D} = \overline{\overline{D}}$ schon bekannt und $D_i = \overline{D_i}$ offensichtlich, weil in der Umgebung eines isolierten Punktes ja nur er selbst liegt. Somit gilt:

$$H(D) = \overline{D} \setminus D_i \Rightarrow \overline{H(D)} = \overline{\overline{D}} \setminus \overline{D_i} = \overline{D} \setminus D_i = H(D).$$

Womit wie in a) gezeigt wurde, dass $H(D)$ $\left(= \overline{H(D)}\right)$ abgeschlossen ist.

IV Variationen, Verallgemeinerungen, Abschwächungen

Im Wesentlichen stellen die Aufgabenteil a) und b) eine Verbindung zwischen den Begriffen „Berührpunkt“ und „Grenzwert (einer konvergenten Folge)“ her, wenn sich beide Begriffe auf die selbe zugrunde liegende Menge beziehen, so wurde gefolgert, sind die Begriffe äquivalent. Nachdem dies in c) und d) angewendet wurde, schließt e) den Bogen und bindet den Begriff

„Häufungspunkt“ ein. Zusammengefasst folgt dann:

$$\text{„Grenzwert“} \Leftrightarrow \text{„Berührpunkt“} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{„Häufungspunkt“} \\ \text{„isolierter Punkt“} \end{cases}$$

Es wurde gezeigt, dass die Menge der Häufungspunkte einer bestimmten Menge wie die ihrer Berührpunkte abgeschlossen ist, ergänzend kann festgehalten werden, dass dies auch auf die Menge der isolierten Punkte übertragbar ist.
Andersherum kann gefolgert werden, dass für eine Menge ohne isolierte Punkte alle Häufungspunkte zugleich Grenzwerte sind, was überleitet zu...

V Nutzen & Anwendungen

Die Begriffe Berühr- und Häufungspunkt stellen den Übergang von der Analysis zur Topologie dar, die sich mit topologischen Räumen und Strukturen befasst (schon die Begriffe „Punkt“ für die Elemente einer Menge und „Umgebung“ deuten diesen Bezug an).
In der Topologie wird dann etwa das Kriterium der An-/Abwesenheit isolierter Punkte in einer Menge (dann: in einem topologischen Raum) in den sogenannten Abzählbarkeitsaxiomen aufgenommen.

Johannes Flake · 13. März 2007