Musterlösung zu Blatt 11, Aufgabe 1

I Aufgabenstellung

Es sei $I = [a, b]$ ein *kompaktes* Intervall.

(a) Zeigen Sie, daß eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ genau dann injektiv ist, wenn sie strikt monoton ist.

(b) Sei $f : I \to I$ stetig. Zeigen Sie, dass f einen *Fixpunkt* hat, d.h. ein $c \in I$ mit $f(c) = c$ existiert.

(c) Sei $f : I \to I$ eine *Kontraktion*, d.h. es existiert ein $0 \leq q < 1$ mit

$$|f(x) - f(y)| \leq q|x - y| \qquad \text{für alle } x, y \in I$$

Sei $x_0 \in I$ beliebig und $x_{n+1} := f(x_n), n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass (x_n) eine Cauchy-Folge in I ist und dass $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ der *einzige* Fixpunkt von f ist.

II Beweisidee

„Worum geht's?“: In Aufgabe (a) soll bewiesen werden, was anschaulich sofort klar ist: Ist eine Funktion auf einem Intervall strikt monoton, dann ist sie umkehrbar, also muss sie auch injektiv sein – und umgekehrt (Man beachte: Um umkehrbar zu sein, muss die Funktion bijektiv, d.h. injektiv und surjektiv sein; die Surjektivität kann aber leicht durch Beschränkung der Zielmenge auf die Wertemenge (also das Bild der Funktion) erreicht werden).
Teilaufgabe (b) kann man sich auch leicht verdeutlichen: Sie besagt lediglich, dass eine Abbildung $f : I \to I$ immer mindestens einen Schnittpunkt mit der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten ($y = x$) besitzt. Diese Schnittpunkte heißen eben gerade *Fixpunkte*, weil hier Bild und Urbild übereinstimmen.
Aufgabe (c) behandelt auch Funktionen der Art $f : I \to I$, jedoch mit einer Zusatzbedingung, die sehr an die Lipschitzbedingung erinnert. Aus diesem Grund stellt man sich eine Kontraktion am besten wie eine Funktion von einem Intervall I nach I vor, die überall eine Steigung hat, die kleiner als 1 ist. Das kann dadurch begründet werden, (Schrankensatz, (17.6) im Skript von Prof. Schottenloher) dass $f'(x)$ auf I kleiner/gleich q sein muss, und q bekanntlich kleiner 1 ist, d.h. $f'(x) < 1$ für alle $x \in I$. Eine Kontraktion ist also zum Beispiel die Funktion $f : [0, 2] \to [0, 2],\ x \mapsto \sqrt{x + 1}$, da die maximale Steigung $\frac{1}{2} < 1$ beträgt.

„Wie mach' ich das?“:

(a) Da es eine Äquivalenz von zwei Aussagen (f strikt monoton $\Leftrightarrow$ f injektiv) zu beweisen gilt, wird der Beweis in den zwei bekannten Teilschritten ablaufen: Hin- und Rückrichtung. In der „Hin“-richtung lässt sich sehr einfach aus dem Kriterium für strikte Monotonie das der Injektivität ableiten; dazu seien beide noch einmal wiederholt:

- Eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann strikt monoton, wenn entweder für alle $x, y \in I$ mit $x < y$ gilt, dass $f(x) < f(y)$ ist (steigend), oder für alle $x, y \in I$ mit $x < y$ die Ungleichung $f(x) > f(y)$ gilt (fallend).
- Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann injektiv, wenn für alle $x, y \in I$ gilt: Ist $x \neq y$, dann ist auch $f(x) \neq f(y)$.

Die Rückrichtung ist dagegen etwas schwieriger. Ein wichtiger Punkt im Beweis ist der Zwischenwertsatz, der an dieser Stelle noch einmal genannt sei:

- Für eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit $I = [a, b]$ gilt: Für alle Funktionswerte η zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein $\xi \in I$ mit $f(\xi) = \eta$.

Für den Beweis an sich nehmen wir zunächst „ohne Einschränkung" an, dass $f(a) < f(b)$ ist. Wäre dies nämlich nicht erfüllt, so könnte man das durch die einfache Transformation $f \mapsto -f$ ändern. Weiter beweisen wir in einem 1. Schritt die Ungleichung $f(a) < f(x) < f(b)$ für alle $x \in I \setminus \{a, b\}$. Dazu benötigen wir den bereits erwähnten Zwischenwertsatz. Und in einem letzten Schritt kann man relativ direkt hieraus folgern, dass für alle $x, y \in I$ mit $x < y$ gilt, dass $f(x) < f(y)$ stimmt, womit ja die strikte Monotonie gezeigt wäre.

(b) Diese Teilaufgabe erfordert auch die Zuhilfenahme des Zwischenwertsatzes. Doch damit man ihn korrekt anwenden kann, müssen wir uns zunächst eine stetige Hilfs-Funktion $g(x) := f(x) - x,\ x \in I$ basteln. Offensichtlich hat $g(x)$ genau da eine Nullstelle, wo der Graph von $f(x)$ die Gerade $y = x$ schneidet, also dort wo sich die Fixpunkte von f befinden. Nun bleibt also zu zeigen, dass $g(x)$ eine Nullstelle hat; das kann mit dem Zwischenwertsatz getan werden, wie wir unten sehen werden.

(c) Was war eigentlich eine Cauchy-Folge (CF)?

- Eine reelle Zahlenfolge (a_n) heißt *Cauchyfolge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n, m \geq n_0$ gilt:
$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

Es ist jetzt also unsere Aufgabe, dieses abstrakte Kriterium nachzuprüfen. Dazu ist es jedoch von Nutzen, wenn man schon einmal eine *Teleskopsumme* gesehen hat:

$$\sum_{i=n}^{m-1} (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=n}^{m-1} (-x_i + x_{i+1}) =$$
$$= (-x_n + x_{n+1}) + (-x_{n+1} + x_{n+2}) + (-x_{n+2} + x_{n+3}) + \ldots + (-x_{m-1} + x_m)$$

Das schöne an einer solchen ist, dass die „mittleren" Summanden, wie x_{n+1},x_{n+2},..., alle herausfallen. Es bleiben also nur der erste und der letzte Summand übrig:

$$\sum_{i=n}^{m-1} (x_{i+1} - x_i) = x_m - x_n.$$

Damit sollte uns jetzt nichts mehr im Wege stehen, die drei Teilaufgaben anzugehen.

„Wie komm' ich drauf?": Wie so oft, ist es hier notwendig, sich die Aufgabenstellungen ruhig anhand von Skizzen und Zeichnungen (z.B. von Funktionen die für die Aufgabe in Frage kommen) zu verdeutlichen. Für Teilaufgabe (b) könnte man sich zum Beispiel vereinfachend das Intervall $[0,1]$ auswählen und dann stetige Funktionen $[0,1] \to [0,1]$ betrachten, oder versuchen, welche zu konstruieren, die *nicht* die Gerade $y = x$ schneiden.

III Lösung

(a) „$\Rightarrow$": („Hin"-richtung)
Sei also $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und strikt monoton. Das heißt, für zwei unterschiedliche x, y aus I gilt entweder $f(x) < f(y)$ oder $f(x) > f(y)$; auf alle Fälle ist $f(x) \neq f(y)$. Womit f injektiv wäre, weil für alle $x, y \in I, x \neq y$ erfüllt ist, dass $f(x) \neq f(y)$ ist (siehe weitere Erläuterungen unter „Wie mach' ich das?").

„$\Leftarrow$": (Rückrichtung)
Sei nun $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv. Das heißt, für a, b (das sind die Intervallgrenzen von $I = [a, b]$) ist auch $f(a) \neq f(b)$, da $a \neq b$. Weil die reellen Zahlen angeordnet sind, bedeutet das, dass entweder $f(a) < f(b)$ oder $f(a) > f(b)$ gilt. Ohne Einschränkung können wir den ersten Fall annehmen: Wäre nämlich $f(a) > f(b)$, also der zweite Fall erfüllt, so könnte man ihn durch den einfachen Übergang von $f \mapsto -f$ zum ersten machen. Also: $f(a) < f(b)$.
1. Schritt: Wir beweisen, dass für alle x aus $I \setminus \{a, b\}$ gilt:

$$f(a) < f(x) < f(b) \tag{1}$$

Dazu nehmen wir an, dass es ein x_0 aus $I \setminus \{a, b\}$ gibt, für das die Aussage oben nicht gilt und versuchen zu einem Widerspruch zu gelangen. Dieses x_0 muss also entweder kleiner/gleich $f(a)$ oder größer/gleich $f(b)$ sein. Diese beiden Fälle betrachten wir nun nacheinander:

- 1. Fall: $f(x_0) \leq f(a)$. Offensichtlich gilt hier: $f(x_0) \leq f(a) < f(b)$, d.h. nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein ξ aus dem Intervall $[x_0, b]$, das den Funktionswert $\eta = f(a)$ besitzt: $f(\xi) = \eta = f(a)$. Das ist aber ein Widerspruch zur Injektivität von f, weil $\xi \neq a$, aber trotzdem $f(\xi) = f(a)$ gilt.
- 2. Fall: $f(x_0) \geq f(b)$. Wie oben gilt hier nur umgedreht: $f(x_0) \geq f(b) > f(a)$. Damit kann wieder der Zwischenwertsatz angewendet werden: Es muss also einen Wert ξ aus dem Intervall $[a, x_0]$ geben, der den Funktionswert $f(\xi) = \eta = f(b)$ hat. Wiederum ergibt sich ein Widerspruch zur Injektivität von f: Obwohl $\xi \neq b$ ist, haben beide denselben Funktionswert $\eta = f(\xi) = f(b)$.

Damit wäre Gleichung (**??**) per Widerspruchsbeweis gezeigt.
2. Schritt: Wir beweisen, dass für alle x, y aus I mit $x < y$ gilt:

$$f(x) < f(y)$$

Dazu unterscheiden wir wieder zwei Fälle:

- 1. Fall: $y = b$. Da $x < y = b$ ist, folgt mit Gleichung (**??**), dass $f(x) < f(b) = f(y)$ ist.
- 2. Fall: $y < b$. Es gilt also: $x < y < b$. Betrachten wir nun das Intervall $I' = [x, b]$, auf dem wegen $I' \subset I$ die Funktion f auch stetig und injektiv ist. Damit können wir die Gleichung (**??**) für $y \in I' \setminus \{x, b\}$ anwenden: $f(x) < f(y) < f(b)$, also $f(x) < f(y)$.

quod erat demonstrandum.

(b) Wie unter „Beweisidee“ schon angekündigt, betrachtet man hier am besten die Hilfsfunktion $g(x) = f(x) - x$, die wegen der Stetigkeit von f auch stetig ist. Ihre Nullstellen sind die Fixpunkte von f, denn wenn $g(x) = f(x) - x = 0$ ist, so ist $f(x) = x$. Um mit dem Zwischenwertsatz zu beweisen, dass es Nullstellen auf dem Intervall $I = [a, b]$ gibt, sehen wir uns die Grenzen a und b an:

- Weil $f(a)$ irgendein Wert zwischen a und b sein muss, gilt: $f(a) \geq a$. Damit ergibt sich für $g(a)$:
$$g(a) = f(a) - a \geq a - a = 0$$
- Ähnliches gilt für b: $f(b) \leq b$, das heißt $g(b) = f(b) - b \leq b - b = 0$.

Insgesamt ist also $g(a) \geq 0$ und $g(b) \leq 0$. Deshalb muss es nach dem Zwischenwertsatz ein $c \in I$ geben mit $g(c) = 0$, also $f(c) = c$. c wäre also ein Fixpunkt von f.

(c) Um zu zeigen, dass (x_n) eine Cauchyfolge ist, prüfen wir die u.a. unter „Beweisidee“ erwähnte Definition nach: Dazu schätzen wir $|\,x_m - x_n|$ mit zwei beliebigen Indizes $m, n \in \mathbb{N}$ ab, wobei ohne Einschränkung $m \geq n$ sein soll; zuvor wenden wir jedoch den Trick der Teleskopsumme rückwärts an (genaueres siehe „Beweisidee“ – „Wie mach' ich das?“):

$$|\,x_m - x_n| = \left| \sum_{i=n}^{m-1} (x_{i+1} - x_i) \right|$$

Durch eine Verschiebung des Summationsindex i um n und die mehrfache Anwendung der Dreiecksungleichung erhält man also:

$$|\,x_m - x_n| = \left| \sum_{i=0}^{m-n-1} (x_{n+i+1} - x_{n+i}) \right| \leq \sum_{i=0}^{m-n-1} |\,x_{n+i+1} - x_{n+i}|$$

Jetzt muss noch die Voraussetzung $|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|\,, \forall\, x, y \in I$ eingebracht werden; dazu untersucht man $|\,x_{n+i+1} - x_{n+i}|$: (Man beachte die rekursive Definition der

Folge (x_n): $x_{n+1} := f(x_n))$

$$\begin{aligned} |\,x_{n+i+1} - x_{n+i}| &= |\,f(x_{n+i}) - f(x_{n+i-1})| \\ &\leq q \cdot |x_{n+i} - x_{n+i-1}| = q\,|f(x_{n+i-1}) - f(x_{n+i-2})| \\ &\leq q^2\,|x_{n+i-1} - x_{n+i-2}| = q^2\,|f(x_{n+i-2}) - f(x_{n+i-3})| \leq \dots \\ &\leq q^{n+i} \cdot |x_1 - x_0| = q^i\,q^n\,|x_1 - x_0| \end{aligned}$$

(Diesen Zusammenhang könnte man auch durch vollständige Induktion beweisen)
Damit erhält man insgesamt für $|\,x_m - x_n|$:

$$\begin{aligned} |\,x_m - x_n| &\leq \sum_{i=0}^{m-n-1} |\,x_{n+i+1} - x_{n+i}| \leq \sum_{i=0}^{m-n-1} \left(q^i\,q^n\,|\,x_1 - x_0|\,\right) = \\ &= \left(\sum_{i=0}^{m-n-1} q^i\right) q^n |\,x_1 - x_0| = \underbrace{\frac{1 - q^{m-n}}{1 - q}}_{\leq \frac{1}{1-q}}\,|\,x_1 - x_0|\,q^n \\ &\leq \underbrace{\frac{|x_1 - x_0|}{1 - q}}_{=:M}\,q^n = M\,q^n \end{aligned}$$

Die Folge $(M\,q^n)$ konvergiert offensichtlich gegen 0, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $M\,q^n < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$; damit gilt auch:

$$|\,x_m - x_n| \leq M\,q^n < \varepsilon, \quad \text{für alle } n \geq n_0, \text{ und } m \geq n$$

womit (x_n) eine Cauchyfolge wäre.
Es sei nun (wie in der Angabe) $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Dann ist ($f$ ist (lipschitz-)stetig)

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x,$$

da (x_n) und (x_{n+1}) offensichtlich den gleichen Grenzwert besitzen. x ist also ein Fixpunkt von f.
Um nun die Eindeutigkeit dieses Ergebnisses zu überprüfen, führt man einen typischen Eindeutigkeitsbeweis durch: Man wählt zunächst zwei verschiedene Fixpunkte x, x' und beweist, dass sie, wenn beide Fixpunkte sind, gleich sein müssen, es also nur einen einzigen Fixpunkt geben kann.
Seien x, x' Fixpunkte von f. Wir nehmen wieder an, dass $x \neq x'$ ist, und versuchen zu einem Widerspruch zu gelangen: Dazu setzen wir x, x' in die Voraussetzung ein:

$$|\,x - x'| = |\,f(x) - f(x')| \leq q|\,x - x'| \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{da } x \neq x'} \quad 1 \leq q,$$

was einen Widerspruch zu $q < 1$ darstellt. Es gibt also nur einen Fixpunkt x von f. qed

IV Variationen, Verallgemeinerungen, Abschwächungen

Ergänzend zu Aufgabenteil a) könnten die Bezüge zwischen Stetigkeit, Monotonie und Injektivität/Surjektivität/Bijektivität ausgebaut werden.
Aufgabenteil c) enthält zwei wesentliche Bestandteil des sogenannten *Banach'schen Fixpunktsatzes*. Dieser erweitert das Bewiesene noch um eine Fehlerabschätzung für den über die Folgenkonvergenz konstruierten Fixpunkt.
Der Fixpunktsatz von Banach wird außerdem zum Beweis der Sätze über die implizite und inverse Funktion verwendet.

V Nutzen & Anwendungen

Zu Aufgabe (c) gibt es sehr schöne Beispiele, u.a. ältere Hausübungsaufgaben, z.B. Aufgabe 1a) von Blatt 6. Hier geht es um eine Folge (a_n), die rekursiv durch

$$a_{n+1} := \sqrt{1 + a_n}$$

definiert ist. Wie unter „Beweisidee“ schon ausgeführt ist die Funktion $f : [0,2] \to [0,2]$, $x \mapsto \sqrt{1+x}$ eine Kontraktion, d.h. die Folge (a_n) konvergiert, und zwar gegen den Fixpunkt a von f, den man durch Lösen der Gleichung

$$a = \sqrt{1 + a}$$

zu $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ bestimmen kann. So einfach lässt sich durch Zuhilfenahme von Teilaufgabe (c) diese rekursive Folge untersuchen.

Ludwig Straub, 13. März 2007